Высшая математика Медер

Опредѣлители.

Предисловіе.

Впослѣдствіи намъ часто придется рѣшать системы ур-ій первой степени съ нѣсколькими неизвѣстными. Для этого рѣшенія можно поступать по пріемамъ, извѣстнымъ изъ элементарной математики, но выгоднѣе пользоваться для этой цѣли такъ называемыми опредѣлителями, выраженіями составленными по опредѣленнымъ законамъ изъ извѣстныхъ величинъ ур-ій. Результаты представляются тогда въ симметричномъ видѣ, что само по себѣ уже представляетъ преимущество, но кромѣ того, вслѣдствіи этой симметричности, легче замѣчаются ошибки, которыя вкрадываются въ вычисленія. Въ слѣдующія наши изложенія войдутъ только опредѣлители второго и третьяго порядковъ, поэтому въ этой главѣ мы и займемся рѣшеніемъ только системъ двухъ и трехъ ур-ій, и изслѣдованіемъ свойствъ опредѣлителей названныхъ низшихъ порядковъ.

Рѣшеніе системъ двухъ ур-ій первой степени съ двумя неизвѣстными.

Положимъ, что даны два ур-ія первой степени съ двумя неизвѣстными:

$$(1).\qquad a_1x+b_1y=c_1$$
$$a_2x+b_2y=c_2.$$

Умножимъ первое ур-іе на b_2, второе на b_1 и вычтемъ второе изъ перваго:

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1.$$

Такимъ-же образомъ умножимъ первое ур-іе на a_2, второе на a_1 и вычтемъ первое изъ второго:

$$(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1.$$

слѣдовательно

$$(2).\qquad x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1};\quad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

Разсматривая эти выраженія (2), мы замѣчаемъ, что числители и знаменатели имѣютъ нѣкоторое сходство. Они состоятъ изъ разности произведеній двухъ множителей. Разность такого рода изображаютъ помощью особеннаго символа:

$$(3).\qquad AD-BC=\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}.$$

и называютъ опредѣлителемъ или детерминантомъ второго порядка. Этотъ символъ, слѣдовательно, выражаетъ, что слѣдуетъ умножить члены, лежащіе по діагоналямъ, и изъ произведенія членовъ діагонали, ведущей изъ верхняго угла лѣвой

стороны, вычесть произведеніе членовъ другой діагонали: $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC$.

A, B, C и D называются элементами опредѣлителя. Элементы, стоящіе другъ возлѣ друга, или другъ подъ другомъ, образуютъ ряды опредѣлителя, причемъ горизонтальные ряды AB, CD наз. сторонами, вертикальные-же AC, BD – столбцами. Порядокъ опредѣлителя опредѣляется числомъ столбцовъ.

При помощи этого символическаго изображенія, значенія x и y принимаютъ видъ:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1, & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1, & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Отсюда мы выводимъ слѣдующее правило: рѣшенія двухъ ур-ій первой степени съ двумя неизвѣстными x, y представляются въ формѣ частнаго двухъ опредѣлителей второго порядка. Знаменатель для x и y одинъ и тотъ же, а именно: опредѣлитель, составленный изъ коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ. Числители-же получаются изъ знаменателя, если коэффиціенты соотвѣтственнаго неизвѣстнаго замѣнить правою частью ур-ія.

Примѣръ:
$$5x - 2y = 6.$$
$$3x + 4y = 40.$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6, & -2 \\ 40, & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5, & -2 \\ 3, & 4 \end{vmatrix}} = \frac{6\cdot4 - 40\cdot(-2)}{5\cdot4 - 3\cdot(-2)} = \frac{24+80}{20+6} = 4; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 5, & 6 \\ 3, & 40 \end{vmatrix}}{26} = \frac{5\cdot40 - 6\cdot3}{26} = 7$$

Основныя свойства опредѣлителей второго порядка.

I. Если замѣнить строки столбцами, то величина опредѣлителя не измѣнится. Въ самомъ дѣлѣ

$$\begin{vmatrix} A, & B \\ C, & D \end{vmatrix} = AD - BC \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} A, & C \\ B, & D \end{vmatrix} = AD - BC,$$

слѣдовательно, $\begin{vmatrix} A, & B \\ C, & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A, & C \\ B, & D \end{vmatrix}$.

II. Если переставить строки или столбцы, то измѣнится знакъ опредѣлителя.

$$\begin{vmatrix} C, & D \\ A, & B \end{vmatrix} = BC - AD = -\begin{vmatrix} A, & B \\ C, & D \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} B, & A \\ D, & C \end{vmatrix} = BC - AD = -\begin{vmatrix} A, & B \\ C, & D \end{vmatrix}.$$

III. Величина опредѣлителя не измѣнится, если къ элементамъ одного ряда прибавить соотвѣтственные элементы параллельнаго ряда, умноженные на произвольное число.

$$\begin{vmatrix} A+KC, & B+KD \\ C, & D \end{vmatrix} = (A+KC)D - (B+KD)C =$$
$$= AD + KCD - BC - KCD = \begin{vmatrix} A, & B \\ C, & D \end{vmatrix}.$$

Изъ свойствъ I и II слѣдуетъ справедливость этой теоремы и для второй строки, а также и для обоихъ столбцовъ.

IV. Чтобы умножить опредѣлитель на данное число, слѣдуетъ умножить на это число элементы одного ряда.

$$\begin{vmatrix} KA, & KB \\ C, & D \end{vmatrix} = KAD - KBC = K(AD - BC) = K\begin{vmatrix} A, & B \\ C, & D \end{vmatrix}.$$

Такъ какъ по теоремамъ I и II каждый рядъ можно сдѣлать первой строкой, то доказанная теорема сохраняетъ свою

силу, если умножить на данное число произвольный рядъ. Если въ это ур-іе вмѣсто k подставить $\frac{1}{k}$, то мы получимъ соотвѣтственную теорему относительно дѣленія опредѣлителя на данное число.

Слѣдствіе: Общаго множителя элементовъ одного ряда можно вынести за знакъ опредѣлителя.

Рѣшеніе системы трехъ ур-ій первой степени съ тремя неизвѣстными.

Пусть даны уравненія:

$$
(4).\quad
\begin{aligned}
a_1x+b_1y+c_1z&=d_1\\
a_2x+b_2y+c_2z&=d_2\\
a_3x+b_3y+c_3z&=d_3
\end{aligned}
$$

Умноживъ первое ур-іе на λ_1, второе на λ_2, и сложивъ всѣ три, получимъ:

$$(5).\quad (a_1\lambda_1+a_2\lambda_2+a_3)x+(b_1\lambda_1+b_2\lambda_2+b_3)y+(c_1\lambda_1+c_2\lambda_2+c_3)z=d_1\lambda_1+d_2\lambda_2+d_3.$$

Придавая λ такое значеніе, чтобы коэффиціенты при y и z уничтожились. Для этого рѣшаемъ слѣдующія два ур-ія съ двумя неизвѣстными:

$$b_1\lambda_1+b_2\lambda_2=-b_3.$$
$$c_1\lambda_1+c_2\lambda_2=-c_3.$$

$$\lambda_1=\frac{\begin{vmatrix}-b_3, & b_2\\ -c_3, & c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}b_1, & b_2\\ c_1, & c_2\end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix}b_3, & b_2\\ c_3, & c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}b_1, & b_2\\ c_1, & c_2\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}b_2, & b_3\\ c_2, & c_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}b_1, & b_2\\ c_1, & c_2\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}b_2, & c_2\\ b_3, & c_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}b_1, & c_1\\ b_2, & c_2\end{vmatrix}},$$

$$\lambda_2 = \frac{\begin{vmatrix} b_1, & -b_3 \\ c_1 & -c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1, & b_2 \\ c_1, & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{-\begin{vmatrix} b_1, & b_3 \\ c_1, & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1, & b_2 \\ c_1, & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{-\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}.$$

Подставимъ полученныя значенія λ_1 и λ_2 въ ур-іе (5), получимъ:

$$\left\{a_1 \frac{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1, & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} - a_2 \frac{\begin{vmatrix} b_1, & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1, & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} + a_3\right\} x = d_1 \frac{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1, & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} - d_2 \frac{\begin{vmatrix} b_1, & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} + d_3$$

Умножимъ обѣ части ур-ія на $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

$$\left\{a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1, & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right\} x = d_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - d_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + d_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

$$x = \frac{d_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - d_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + d_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{d_1 b_2 c_3 - d_1 c_2 b_3 - d_2 b_1 c_3 + d_2 c_1 b_3 + d_3 b_1 c_2 - d_3 b_2 c_1}{a_1 b_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 - a_2 b_1 c_3 + a_2 c_1 b_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1}.$$

Разсмотримъ поподробнѣе знаменатель:

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Это выраженіе зависитъ отъ 9 элементовъ слѣдующей схемы:

$$\begin{matrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3. \end{matrix}$$

и составлено по слѣдующему правилу:

Помножаютъ каждый элементъ перваго столбца на опредѣлителя второго порядка, который получится, если пропустить

тому столбцу и ту строку къ которымъ принадлежитъ данный элементъ. Этимъ произведеніямъ придаютъ попеременно положительный и отрицательный знакъ и потомъ складываютъ ихъ; полученное такимъ образомъ выраженіе наз. *опредѣлителемъ 3^{го} порядка* и изображается такимъ образомъ, что схема ставится между двумя вертикальными чертами; такъ что

$$(6): \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Опредѣлители второго порядка, которые получаются изъ опредѣлителя третьяго порядка, если пропустить одну изъ строкъ и одинъ столбецъ, наз. *минорами* или *подчиненными опредѣлителями* второго порядка. Такимъ образомъ къ каждому элементу принадлежитъ опредѣленный миноръ; напримѣръ, если пропустить первую строку и второй столбецъ, то мы видимъ, что элементу b_1 соотвѣтствуетъ миноръ $\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

Ур-іе (6) наз. *формулою разложенія опредѣлителя 3^{го} порядка по минорамъ второго порядка.*

Пользуясь символическимъ изображеніемъ опредѣлителей третьяго порядка, мы можемъ выразить рѣшенія нашихъ ур-ій въ слѣдующемъ видѣ:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

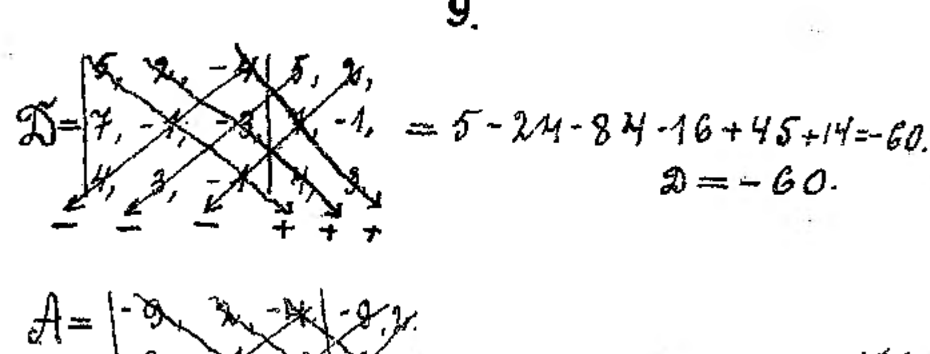
Причемъ законъ образованія этихъ выраженій слѣдующій: Изъ трехъ ур-ій первой степени съ тремя неизвѣстными x, y, z — эти неизвѣстныя получаются въ видѣ частнаго опредѣлителей третьяго порядка. Опредѣлитель въ знаменателѣ одинъ и тотъ же и образуется изъ коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ данной системы ур-ій. Опредѣлители же въ числителѣ получаются изъ опредѣлителя коэффиціентовъ, если замѣнить коэффиціенты соотвѣтственнаго неизвѣстнаго черезъ правую часть ур-ій.

Существуетъ еще другой способъ вычисленія опредѣлителей третьяго порядка, который выясняется слѣдующей схемой:

$$\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \\ - & - & - & + & + \; + \end{array} = a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-c_1b_2a_3-a_1c_2b_3-b_1a_2c_3.$$

Примѣръ:
$$5x+2y-4z=-9.$$
$$7x-y-3z=8.$$
$$4x+3y-z=1.$$

$x=\frac{A}{D}$; $y=\frac{B}{D}$; $z=\frac{C}{D}$, причемъ



$$A=\begin{vmatrix}-9, & 2, & -4\\ 8, & -1, & -3\\ 1, & 3, & -1\end{vmatrix}\begin{matrix}-9, & 2,\\ 8, & -1.\\ 1, & 3\end{matrix} = -9-6-96-4-81+16=-180.$$

$$A=-180.$$

$$B=\begin{vmatrix}5, & -9, & -4\\ 7, & 8, & -3\\ 4, & 1, & -1\end{vmatrix}\begin{matrix}5, & -9.\\ 7, & 8.\\ 4, & 1\end{matrix} = -40+108-28+128-15-63=120.$$

$$B=120.$$

$$C=\begin{vmatrix}5, & 2, & -9\\ 7, & -1, & 8\\ 4, & 3, & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}5, & 2.\\ 7, & -1.\\ 4, & 3\end{matrix} = -5+64-189-36-120-14=-300.$$

$$C=-300.$$

$$x=3,\quad y=-2,\quad z=5.$$

Основныя свойства опредѣлителей третьяго порядка.

I. Если замѣнить столбцы строками, то величина опредѣлителя не измѣнится. Пусть

$$\mathfrak{D}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix},\quad \mathfrak{D}'=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

Требуется доказать, что $\mathfrak{D}=\mathfrak{D}'$.

(7). $$\mathfrak{D}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\begin{matrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{matrix} = a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-c_1b_2a_3-a_1c_2b_3-b_1a_2c_3.$$

$$\mathfrak{D}'=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}\begin{matrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{matrix} = a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3.$$

Полученныя для Д и Д' выраженія тождественны, такъ что въ самомъ дѣлѣ Д=Д'. По формулѣ (в) мы можемъ опредѣлитель Д' разложить по минорамъ принадлежащимъ элементамъ перваго столбца.

$$D' = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Разсматривая входящія въ эту формулу миноры, какъ миноры опредѣлителя Д, мы видимъ, что опредѣлитель третьяго порядка можно разложить на миноры второго порядка не только по элементамъ перваго столбца, но и по элементамъ первой строки.

<u>II. Если переставить два параллельные ряда, то опредѣлитель измѣняетъ свой знакъ.</u>

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \qquad D' = \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Требуется доказать, что $D = -D'$.

$$D' = b_1a_2c_3 + a_1b_3c_2 + c_1b_2a_3 - c_1a_2b_3 - b_1c_2a_3 - a_1b_2c_3.$$

Если сравнить это выраженіе съ выраженіемъ (7), то увидимъ, что оно состоитъ изъ тѣхъ-же членовъ, но съ обратнымъ знакомъ каждый. Слѣдовательно, Д=-Д'. Такимъ же путемъ можно убѣдиться въ справедливости теоремы для двухъ какихъ-нибудь рядовъ.

<u>Слѣдствіе I: Опредѣлитель можно разложить на миноры по элементамъ какого угодно столбца и какой угодно строки, причемъ если разложеніе происходитъ по элементамъ второго столбца или второй строки, то первый членъ разложенія имѣетъ знакъ минусъ (−), во всѣхъ же остальныхъ — знакъ плюсъ (+).</u>

Въ самомъ дѣлѣ:

$$D=-\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}=-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+b_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

если переставить въ этомъ опредѣлителѣ первый и третій столбцы, то знакъ (−) передъ опредѣлителемъ перейдетъ въ (+):

$$D=\begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}=c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}-c_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Переставляя въ опредѣлитель первоначальнаго вида первую и вторую строки и разлагая по первой строкѣ, получимъ:

$$D=-\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=-a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+b_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}-c_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Замѣняя наконецъ первую строку третьею и наоборотъ, находимъ:

$$D=\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}-b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Такъ для вычисленія слѣдующаго опредѣлителя (D_1) выгоднѣе всего разложить его по элементамъ второй строки, ибо тогда первый и третій миноры равны нулю.

$$D_1=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = b_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Слѣдствіе II. Опредѣлитель, въ которомъ два параллельные ряда одинаковы, равенъ нулю.

Данный опредѣлитель обозначимъ черезъ D_0. Если переставить одинаковые ряды, то полученный такимъ образомъ опредѣлитель назовемъ черезъ D'_0; тогда по теоремѣ второй:

(8) $D'_0=-D_0$, но такъ какъ при этомъ опредѣлитель очевидно остается тотъ-же, то имѣемъ право написать:

(9) $D'_0=D_0$.

Вычтя изъ ур-ія (9) ур-іе (8), получимъ:

$0=2D_0$, значитъ $D_0=0$.

III. Чтобы умножить данный опредѣлитель на какое-нибудь число, надо умножить на это число элементы какого-нибудь ряда.

$$kD=k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=k(a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-c_1b_2a_3-a_1c_2b_3-b_1a_2c_3)=$$

$=a_1(kb_2)c_3+b_1(kc_2)a_3+c_1(ka_2)b_3-c_1(kb_2)a_3-a_1(kc_2)b_3-$

$$-b_1(ka_2)c_3 = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ ka_2, & kb_2, & kc_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}.$$

То-же можно получить относительно каждаго ряда, видоизмѣняя произведенія:

$$a_1(kb_2)c_3 = (a_1k)b_2c_3 = a_1b_2(kc_3) \ldots\ldots$$

k можетъ быть цѣлымъ или дробнымъ количествомъ. Если $k=\frac{1}{e}$, то получаемъ соотвѣтственную теорему относительно дѣленія опредѣлителя:

$$kD = \frac{D}{e} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \frac{a_2}{e} & \frac{b_2}{e} & \frac{c_2}{e} \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

<u>Слѣдствіе.</u> <u>Общихъ множителей элементовъ одного ряда можно вынести передъ знакъ опредѣлителя.</u>

<u>IV. Если въ опредѣлителѣ третьяго порядка разложить элементы одного ряда на два слагаемыхъ, то опредѣлитель можно замѣнить суммою двухъ опредѣлителей третьяго порядка, которые получаются изъ первоначальнаго опредѣлителя, если замѣнить разложенные ряды сначала одними слагаемыми, потомъ другими.</u>

Если предположить, что

$$a_1 = h_1 + k_1$$
$$a_2 = h_2 + k_2$$
$$a_3 = h_3 + k_3,$$

то

(10). $$D = \begin{vmatrix} h_1 + k_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 + k_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 + k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Требуется доказать, что

$$D=\begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Разлагая определитель D (10) по минорамъ второго порядка, получимъ:

$$D=(h_1+k_1)\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-(h_2+k_2)\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+(h_3+k_3)\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}=$$

$$=h_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+k_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-h_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-k_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+h_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}+$$

$$+k_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}=\left\{h_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-h_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+h_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right\}+$$

$$+\left\{k_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-k_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+h_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right\}=$$

$$=\begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

что и требовалось доказать.

Такъ какъ по теоремамъ I и II каждый рядъ можно сдѣлать первымъ столбцомъ, то, слѣдовательно, эта теорема справедлива и для того случая, если разложить на два слагаемыхъ произвольный столбецъ или строку.

<u>Слѣдствіе: Значеніе опредѣлителя не измѣняется, если къ элементамъ одного ряда прибавить произвольныя кратныя параллельнаго ряда.</u>

Требуется доказать, что

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+kc_1 , & b_1 , & c_1 \\ a_2+kc_2 , & b_2 , & c_2 \\ a_3+kc_3 , & b_3 , & c_3 \end{vmatrix}$$

Въ самомъ дѣлѣ

$$\begin{vmatrix} a_1+kc_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+kc_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+kc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kc_1 & b_1 & c_1 \\ kc_2 & b_2 & c_2 \\ kc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

ибо опредѣлитель $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ имѣя два одинаковыхъ столбца, по слѣдствію 2 теоремы II, равенъ нулю. K можетъ быть, какъ положительнымъ, такъ и отрицательнымъ, значитъ можно не только прибавить кратныя параллельнаго ряда, но и вычесть.

Опредѣлитель $n^{\text{го}}$ порядка.

Опредѣлителемъ $n^{\text{го}}$ порядка называется выраженіе, законъ образованія котораго выясняется слѣдующимъ пріемомъ:

$$\begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 & \ldots & a'_n \\ a''_1 & a''_2 & a''_3 & \ldots & a''_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^{(n)}_1 & a^{(n)}_2 & a^{(n)}_3 & \ldots & a^{(n)}_n \end{vmatrix} = a'_1 \begin{vmatrix} a''_2 & \ldots & a''_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a^{(n)}_2 & \ldots & a^{(n)}_n \end{vmatrix} -$$

$$- a''_1 \begin{vmatrix} a'_2 & \ldots & a'_n \\ a'''_2 & \ldots & a'''_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a^{(n)}_2 & \ldots & a^{(n)}_n \end{vmatrix} + \ldots + (-1)^{n-1} a^{(n)}_1 \begin{vmatrix} a'_2 & \ldots & a'_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a^{(n-1)}_2 & \ldots & a^{(n-1)}_n \end{vmatrix}.$$

Примѣры:

Пусть требуется вычислить опредѣлитель четвертаго порядка:

$$\begin{vmatrix} 5, & 4, & 3, & 2 \\ 1, & -1, & -3, & 4 \\ 3, & 2, & 1, & -1 \\ -4, & 2, & 3, & 0 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} -1, & -3, & 4 \\ 2, & 1, & -1 \\ 2, & 3, & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4, & 3, & 2 \\ 2, & 1, & -1 \\ 2, & 3, & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+3\begin{vmatrix} 4, & 3, & 2 \\ -1, & -3, & 4 \\ 2, & 3, & 0 \end{vmatrix} - (-4)\begin{vmatrix} 4, & 3, & 2 \\ -1, & -3, & 4 \\ 2, & 1, & -1 \end{vmatrix} = 5(6+24-8-3) -$$

$$-(-6+12-4+12) + 3(24-6+12-48) +$$

$$+4(12+24-2+12-16-3) = 5.19-14+3.(-18)+4.27 =$$

$$= 135$$

Аналитическая геометрія

Разница между геометріею древнихъ и аналитической состоитъ въ слѣдующемъ: геометрія древнихъ, непосредственно изъ разсматриванія геометрическихъ фигуръ, выводитъ свойства ихъ, допуская какъ единственное пособіе, проведеніе какихъ-нибудь вспомогательныхъ линій. Аналитическая-же геометрія старается выразить основныя соотношенія геометрическихъ фигуръ ур-іями. Изъ алгебраическихъ результатовъ комбинированія этихъ ур-ій узнаютъ тогда новыя, еще неизвѣстныя свойства изслѣдуемой линіи или поверхности. Сообразно съ раздѣленіемъ нашей геометріи на планиметрію и стереометрію, аналитическая геометрія распадается на двѣ главныя части: „аналитическую геометрію на плоскости" или „плоскую аналитическую геометрію" и „аналитическую геометрію въ пространствѣ." —

Аналитическая геометрія на плоскости.

Прямолинейныя координаты. Основныя задачи.

Чтобы возможно было замѣнить разсмат-

рисованіе геометрическихъ фигуръ алгебраическими дѣйствіями, надо установить связь между точками и числами. Для этого мы, по примѣру Декарта (1596-1650), проводимъ на плоскости двѣ взаимно-перпендикулярныя прямыя неограниченной длины XX' и YY', которыми вся плоскость раздѣляется на четыре безконечно-большія части. Горизонтальная прямая называется осью абсциссъ или осью $X^{овъ}$, а вертикальная осью ординатъ или осью $Y^{овъ}$. Обѣ оси носятъ общее названіе координатныхъ осей и составляютъ вмѣстѣ прямоугольную или ортогональную прямолинейную координатную систему на плоскости. Точка пересѣченія координатныхъ осей, т. е. точка O, называется началомъ координатъ.

Пусть дана на нашей плоскости нѣкоторая точка P. Опустимъ изъ нея перпендикуляры PQ и PR на координатныя оси XX' и YY'.

фиг. 1.

Отрѣзки этихъ перпендикуляровъ отъ точки P до координатныхъ осей, т. е. отрѣзки QP и RP называются координатами точки P, а именно отрѣзокъ RP абсциссою, а отрѣзокъ QP ординатою. Такимъ

OQPR прямоугольникъ, что противолежащія стороны равны и параллельны:

$RP \# OQ$, $QP \# OR$,

поэтому и OQ можно назвать абсциссою, а OR ординатою точки P. Абсциссу обыкновенно обозначаютъ буквою x, ординаты буквою y. Очевидно каждой точкѣ P соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленные отрѣзки OQ и OR. Если мы теперь установимъ масштабъ фигуры, т. е. если мы примемъ отрѣзокъ извѣстной длины за единицу мѣры длины, то мы можемъ опредѣлить численныя значенія координатъ x и y. Пусть OE будетъ единицею мѣры длины и содержится въ OQ три раза, а въ OR два раза; тогда точка P имѣетъ абсциссу 3, а ординату 2. Это принято обозначить такъ:

$$P: \begin{matrix} x=3. \\ y=2. \end{matrix} \quad \text{или} \quad P(3, 2).$$

Такимъ образомъ каждой точкѣ на плоскости соотвѣтствуетъ одна и только одна совершенно опредѣленная пара чиселъ. Чтобы рѣшеніе обратной задачи, по даннымъ координатамъ построить точку, было-бы однозначно, принято считать абсциссы, которыя откладываются влѣво отъ начала координатъ, и ординаты, откладываемыя внизъ отъ O, отрицательными. Пусть, напри-

метръ требуется построить точку съ координатами $x=-5$ и $y=-3$. Рѣшеніе задачи ясно изъ чертежа.

Фиг. 2.

Часть OX называется положительною, а OX' отрицательною частью оси ординатъ.

Очевидно, при такомъ предположеніи всякая точка, лежащая въ правомъ квадратѣ, т.е. въ части плоскости, ограниченной положительными полуосями, имѣетъ и абсциссу и ординату положительную; точка второго квадрата между OY и OX' имѣетъ

фиг. 3.

абсциссу отрицательную, а ординату положительную, точка третьяго квадрата между OX' и OY' — ея абсциссу и ординату отрицательную; точка четвертаго квадрата, между OY' и OX абсциссу положительную, а ординату отрицательную.

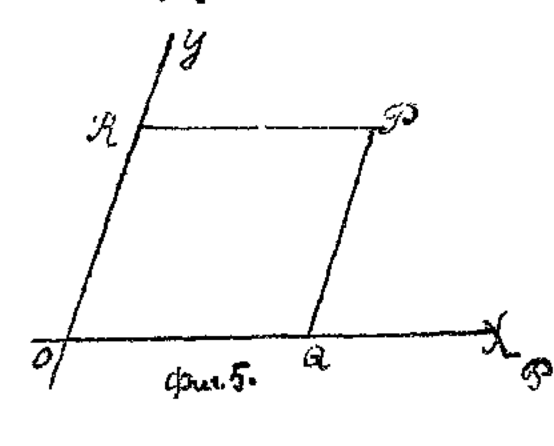
Эти отношенія мы можемъ представить въ слѣдующей таблицѣ, гдѣ P_1, P_2, P_3, P_4 обозначаютъ точки, лежащія соотвѣтственно въ I, II, III, IV квад-

I	P_1	$+x, +y$
II	P_2	$-x, +y$
III	P_3	$-x, -y$
IV	P_4	$+x, -y$.

ратитъ.
Это такъ называемое <u>правило знаковъ</u> примѣняется въ аналитической геометріи вообще ко всѣмъ прямолинейнымъ направленіямъ. Обыкновенно координатныя оси обозначаются не двумя буквами XX' и YY', а только одной X и Y, которыя ставятся на положительной части соотвѣтственной оси.

фиг. 4.

Иногда употребляется косоугольная координатная система; тогда координатами точки будутъ ея разстоянія отъ осей, измѣряемыя каждая параллельно другой оси: $PQ \parallel OY$, $PR \parallel OX$.



фиг. 5.

P: $x = OQ$, $y = OR$ или $P(OQ, OR)$.

Мы будемъ имѣть однако дѣло только съ прямоугольными, прямолинейными координатами. Посмотримъ теперь, что изображаетъ собою одно ур-іе, связывающее между координатъ точки, напримѣръ:

$$y - 2x = 7.$$

Если мы станемъ придавать всевозможныя значенія для X, то и будемъ каждый разъ имѣть опредѣ-

x	y
-5	-3
-4	-1
-3	+1
-2	+3.
-1	+5.
0	+7.
+1	+9.
+2	+11.
+3	+13
⋮	⋮

ленное значеніе. Такъ если $x=-5$, то y должно быть равно -3 и т.д. по прилагаемой таблицѣ. Каждая пара чиселъ доставляетъ намъ точку. Очевидно можно построить еще сколько угодно промежуточныхъ точекъ и совокупность всѣхъ этихъ точекъ составитъ какую-нибудь линію (въ данномъ случаѣ прямую). Тѣ же соображенія примѣняются къ какому угодно ур-ію между x и y.

фиг. 6.

Безконечно-многимъ парамъ чиселъ, удовлетворяющимъ данному ур-ію соотвѣтствуетъ безконечно много точекъ, координаты которыхъ суть именно эти числа, и которыя лежатъ на нѣкоторой прямой или кривой линіи. Эту связь между ур-іемъ и соотвѣтственною кривою выражаютъ словами: „ур-іе есть ур-іе кривой" и наоборотъ „кривая удовлетворяетъ ур-ію." Надо замѣтить, что координаты x y точекъ кривой <u>измѣняются</u> при пере-

ходѣ отъ одной точки къ другой. Этимъ онѣ рѣзко отличаются отъ величинъ, разсматриваемыхъ въ элементарной математикѣ. Онѣ принадлежатъ къ разряду такъ называемыхъ <u>перемѣнныхъ</u> величинъ, съ которыми мы подробнѣе познакомимся въ курсѣ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій.

<u>Задача</u>. Опредѣлить разстояніе двухъ точекъ P_1 и P_2, данныхъ своими прямоугольными координатами $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$.

фиг. 7.

Опустивъ перпендикуляръ P_1R на P_2Q_2, изъ прямоугольнаго тр-ка P_1P_2R имѣемъ:

$$P_1P_2^2 = P_1R^2 + RP_2^2 = Q_1Q_2^2 + (Q_2P_2 - Q_2R)^2 = (OQ_2 - OQ_1)^2 + (Q_2P_2 - Q_1P_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Отсюда

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} \quad \ldots\ldots (1).$$

Полученная формула доказана только для частнаго положенія точекъ P_1 и P_2, но не трудно убѣдиться, что оно справедливо и при произвольномъ положеніи ихъ; слѣдуетъ только принимать во вниманіе знаки координатъ въ различныхъ квадрантахъ

Задача. Опредѣлить ур-іе круга.

Положимъ, данъ кругъ, координаты центра M котораго суть a, b и радіусъ котораго r.

фиг. 8.

Взявъ произвольную точку $P(x, y)$ на кругѣ, имѣемъ для разстоянія MP

$MP = r = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, отсюда

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

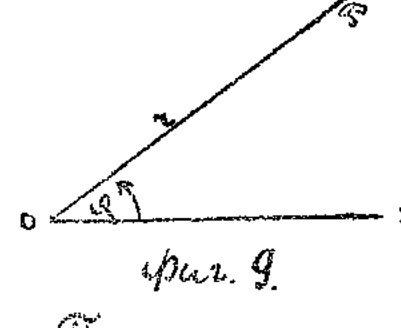
Такъ какъ разстояніе всѣхъ точекъ круга отъ центра постоянно, именно равно r, то какія-бы мы ни брали на немъ точки, координаты каждой изъ нихъ удовлетворяютъ выведенному ур-ію, то есть полученное уравненіе есть уравненіе круга.

Если начало координатъ совпадаетъ съ центромъ круга, то $a=0$ и $b=0$ и мы получаемъ уравненіе круга, описаннаго радіусомъ r около начала координатъ:

$$x^2+y^2=r^2 \quad \ldots\ldots (2^a).$$

Полярныя координаты.

Пусть на плоскости дана точка O и прямая Ox неограниченной длины —



фиг. 9.

ны, начинающаяся въ точкѣ O. Точка O назовемъ полюсомъ, прямую Ox—полярной осью.

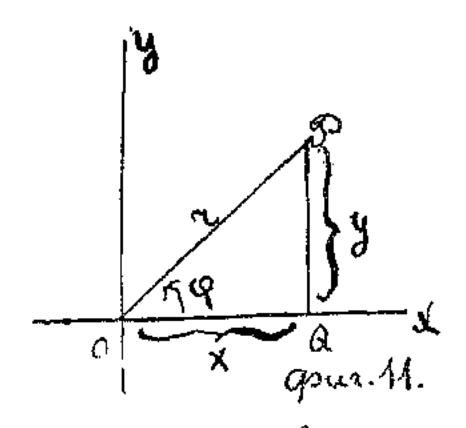
Полюсъ и полярная ось составляютъ вмѣстѣ полярную систему координатъ. Положеніе всякой точки P на плоскости опредѣлено, коль скоро намъ даны разстояніе ея r отъ полюса O и уголъ φ, образуемый прямою OP съ данною прямою Ox, то есть съ полярною осью. OP называется радіусомъ векторомъ точки P, а уголъ φ, образуемый радіусомъ векторомъ съ полярною осью Ox—амплитудою. Радіусъ векторъ и амплитуда вмѣстѣ называются полярными координатами точки P. Для устраненія неопредѣленностей, намъ и здѣсь надо установить правило знаковъ. Радіусъ векторъ r считается всегда положительнымъ. Вопросъ, слѣдовательно, въ томъ, когда считать амплитуду положительною, когда отрицательною.

Вообще въ аналитической геометріи условились принимать уголъ положительнымъ, если онъ отсчитывается по направленію обратному движенію часовой стрѣлки; если

же уголъ отсчитывается согласно съ направленіемъ движенія часовой стрѣлки, то онъ считается отрицательнымъ. Такимъ образомъ если уголъ A отсчитывается по направленію стрѣлки p, то онъ положителенъ и читается $\angle BAC$; если же его отсчитывать по направленію стрѣлки n, то отрицателенъ и читается $\angle CAB$. Поэтому можно написать $\angle CAB = -\angle BAC$. Въ случаѣ полярныхъ координатъ подъ амплитудою φ подразумѣвается уголъ, на который надо вращать полярную ось въ положительномъ смыслѣ, т.е. по направленію обратному движенію часовой стрѣлки, покуда она не совпадетъ съ радіусомъ векторомъ разсматриваемой точки. Такимъ образомъ неопредѣленность устранена, и каждой Ф принадлежитъ всегда положительный радіусъ векторъ r и амплитуда φ отсчитываемъ по опредѣленному направленію.

фиг. 10.

Легко опредѣлить связь между ортогональною прямолинейною и полярною системами. Пусть начало и положительная часть оси абсциссъ прямолинейной системы совпада —



ютъ съ полюсомъ и полярной осью полярной системы. Тогда ось ординатъ получимъ, возставивъ въ точкѣ O перпендикуляръ къ OX; изъ точки P опустимъ перпендикуляръ на OX. Тогда $OQ = x$ и $QP = y$, будутъ координатами точки P въ прямоугольной системѣ, а $OP = r$ и $\angle QOP = \varphi$ будутъ коэффиціентами P въ полярной системѣ. Изъ прямоугольнаго тр-ка OPQ имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \text{-------} (3).$$

Чтобы, наоборотъ, по x и y найти r и φ, возвысимъ обѣ части ур-ій (3) въ квадратъ и сложимъ ихъ:

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r^2.$$

Откуда $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Передъ корнемъ всегда знакъ +, ибо радіусъ векторъ всегда положителенъ. Чтобы найти амплитуду, раздѣлимъ второе уравненіе (3) на первое, получимъ:

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin\varphi \cdot r}{\cos\varphi \cdot r}, \text{ или } \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$$

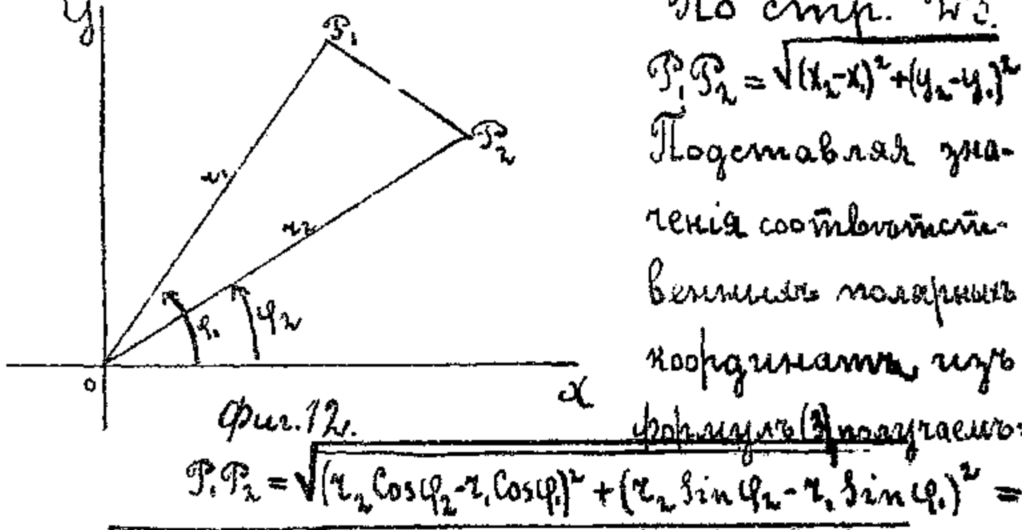
Итакъ, для перехода отъ прямоуголь-

ной системы къ полярной, служатъ формулы:

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ tg\,\varphi &= \frac{y}{x} \end{aligned}\right\} \text{-----------} (3^a).$$

Воспользуемся опредѣленною только-что связью между полярною и прямоугольною системами для опредѣленія разстоянія между двумя точками, отнесенными къ полярной системѣ координатъ.

Пусть данныя точки P_1 и P_2 имѣютъ полярныя координаты r и φ и прямоугольныя x и y съ соотвѣтственными указателями 1, 2.



Фиг. 12.

По стр. 23.

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Подставляя значенія соотвѣтственныхъ полярныхъ координатъ изъ формулъ (3) получаемъ:

$$P_1P_2 = \sqrt{(r_2\cos\varphi_2 - r_1\cos\varphi_1)^2 + (r_2\sin\varphi_2 - r_1\sin\varphi_1)^2} =$$

$$= \sqrt{r_2^2\cos^2\varphi_2 + r_1^2\cos^2\varphi_1 - 2r_2r_1\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + r_2^2\sin^2\varphi_2 + r_1^2\sin^2\varphi_1 - 2r_2r_1\sin\varphi_2\sin\varphi_1} = \sqrt{r_2^2(\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2) + r_1^2(\cos^2\varphi_1+\sin^2\varphi_1) - 2r_2r_1(\cos\varphi_2\cos\varphi_1+\sin\varphi_2\cdot\sin\varphi_1)} =$$

$$= \sqrt{r_2^2 + r_1^2 + 2r_2r_1\cos(\varphi_2-\varphi_1)}.$$

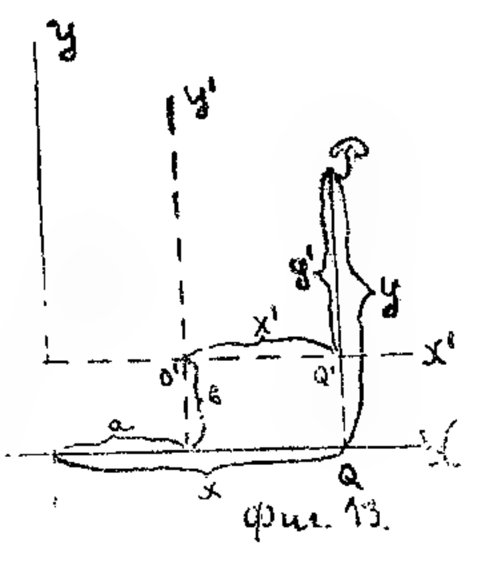
$$P_1P_2 = \sqrt{r_2^2 + r_1^2 - 2r_2r_1\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad \text{- - - - - (4).}$$

Эта формула извѣстна намъ изъ тригонометріи, какъ обобщенная теорема Пиѳагора.

Преобразованіе или превращеніе координатъ.

Иногда при рѣшеніи задачъ получаются очень сложныя выраженія, для упрощенія которыхъ является полезнымъ отнести ихъ къ новой, прилично выбранной, координатной системѣ. Это дѣйствіе называется превращеніемъ или преобразованіемъ координатной системы. Является вопросъ, какъ по даннымъ координатамъ точекъ найти координаты тѣхъ же точекъ по отношенію къ новой координатной системѣ. Разсмотримъ сначала два частныхъ случая:

I. Перемѣщенія координатной системы состоитъ въ томъ, что координатную систему передвигаютъ параллельно самой себѣ, такъ что точка O принимаетъ нѣкоторое новое положеніе O'.



фиг. 13.

Пусть координаты новаго начала O' въ старой системѣ будутъ: $OR = a$, $RO' = в$, а координаты точки P въ старой системѣ x, y, а въ новой x', y'; тогда ясно изъ чертежа, что

$$x' = O'Q' = RQ = OQ - OR = x - a.$$

$$y' = Q'P = QP - QQ' = QP - RO' = y - в.$$

Итакъ мы получаемъ формулы перемѣщенія, которое опредѣляется координатами $a, в$ новаго начала:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - a. \\ y' &= y - в. \end{aligned}\right\} \text{-------} (5).$$

Чтобы перейти отъ координатъ новой системы къ координатамъ старой системы, стоитъ только рѣшить формулы (5) по отношенію къ x и y.

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + a. \\ y &= y' + в. \end{aligned}\right\} \text{------} (5^a)$$

II. Вращеніе координатной системы состоитъ въ томъ, что координатную систему вращаютъ около начала O на нѣкоторый уголъ.

Положимъ, что мы повернули координатную систему на $\angle \alpha$. Расположеніе координатъ

фиг. 14.

точки P въ старой системѣ (X, Y) и въ новой (x', y') ясно изъ чертежа. Опустимъ перпендикуляры Q'P на PQ и Q'R на Ox. Тогда

$$x = OQ = OR - QR = OR - SQ'.$$

$$y = QP = QS + SP = RQ' + SP.$$

Такъ какъ $OR = OQ'\cos\alpha = x'\cos\alpha$.

$SQ' = Q'P\sin\alpha = y'\sin\alpha$, то подставивъ эти значенія въ выраженіе для X, получимъ:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha.$$

Замѣчая далѣе, что

$$RQ' = OQ'\sin\alpha = x'\sin\alpha.$$

$SP = Q'P\cos\alpha = y'\cos\alpha$ и подставляя эти значенія въ ур-іе для y, находимъ

$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

Итакъ, при переходѣ отъ данной координатной системы къ новой, повернутой на $\angle\alpha$, старыя координаты выразятся посредствомъ новыхъ слѣдующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha. \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \text{-------} (6^{a}).$$

Найдемъ теперь, какъ при вращеніи, координаты новой системы выразятся посредствомъ старыхъ. Рѣшимъ для этого уравненія (6^a) по отношенію къ —

x' и y'. Перемноживъ обѣ части перваго ур-iя на $\cos\alpha$, а втораго на $\sin\alpha$ и сложивъ ихъ, получаемъ:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = x'\cos^2\alpha + x'\sin^2\alpha = x';$$

теперь первое уравненiе умножимъ на $\sin\alpha$, а второе на $\cos\alpha$ и вычтемъ первое изъ втораго:

$$y\cos\alpha - x\sin\alpha = y'.$$

Итакъ:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (b).$$

III. <u>Общiй случай преобразованiя координатъ</u> состоитъ въ томъ, что начало перемѣщается и оси поворачиваются на нѣкоторый уголъ.

y' y h P X' ξ O'(a,b) α O X

Фиг. 15.

Положенiе новой координатной системы будетъ вполнѣ опредѣлено, если даны координаты a, b новаго начала въ старой системѣ и уголъ α, на который повернуты оси.

Введемъ третью, вспомогательную систему (ξ, h) съ началомъ O' и

осями, параллельными Ox и Oy. Координаты точки P въ этихъ трехъ системахъ обозначимъ соотвѣтственно черезъ x, y; x', y'; ξ, η. Система (ξ, η) получается изъ системы (x, y) перемѣщеніемъ, а система (x', y') изъ системы (ξ, η) вращеніемъ, слѣдовательно:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - a \\ \eta &= y - b \end{aligned}\right\} \text{-------- } (7).$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= \xi \cdot \cos\alpha + \eta \sin\alpha \\ y' &= -\xi \sin\alpha + \eta \cos\alpha \end{aligned}\right\} \text{---- } (8).$$

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ \eta &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{aligned}\right\} \text{---- } (8^a)$$

Подставивъ значенія ξ и η изъ уравненій (7) въ (8) и (8а), получимъ искомыя соотношенія

$$\left.\begin{aligned} x' &= (x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha \\ y' &= -(x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha \end{aligned}\right\} \text{----- } (9).$$

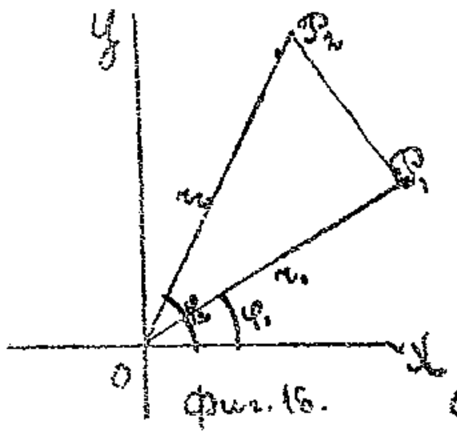
$$\left.\begin{aligned} x &= a + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y &= b + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{aligned}\right\} \text{----- } (9^a).$$

Точки и прямыя линіи.

Задача: Опредѣлить площадь треугольника.

Возьмемъ сначала тотъ частный слу-

чай, когда одна изъ вершинъ тр-ка совпадаетъ съ началомъ координатъ.



Фиг. 16.

Изъ тригонометріи извѣстно, что $\triangle OP_1P_2 = \frac{1}{2}\overline{OP_1}\cdot\overline{OP_2}\cdot\sin(P_1OP_2)$. Если система полярная, то

$OP_1 = r_1$, $OP_2 = r_2$.

$\sphericalangle XOP_1 = \varphi_1$, $\sphericalangle XOP_2 = \varphi_2$.

откуда $\sphericalangle P_1OP_2 = \varphi_2 - \varphi_1$.

Подставимъ найденныя значенія въ выраженіе площади тр-ка, получаемъ:

$$\triangle OP_1P_2 = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \text{ - - - - - } (10).$$

Такъ какъ r всегда положительно, то знакъ выраженія зависитъ отъ знака $\sin(\varphi_2 - \varphi_1)$.

$\sin(\varphi_2 - \varphi_1) > 0$. $\sin(\varphi_2 - \varphi_1) < 0$.

если $\varphi_2 > \varphi_1$, если $\varphi_2 < \varphi_1$.

Случай, когда $\varphi_2 > \varphi_1$ изображенъ на чертежѣ (фиг. 16), если же $\varphi_1 > \varphi_2$, то треугольникъ будетъ имѣть видъ, изображенный на чертежѣ (фиг. 17).

Если передвигаться по сторонамъ тр-ка, начиная отъ точки

O и черезъ P_1 и P_2 опять возвращаясь въ O, то въ первомъ случаѣ ($\varphi_2 > \varphi_1$) тр-къ постоянно находится по лѣвую, во второмъ ($\varphi_2 < \varphi_1$) по правую сторону. Отсюда для вычисленія площадей плоскихъ фигуръ установлено слѣдующее правило знаковъ. Площадь плоской фигуры считается положительною или отрицательною въ зависимости отъ того, будетъ ли фигура при передвиженіи по контуру ея находиться по <u>лѣвую</u> или по <u>правую</u> сторону.

Фиг. 17.

Чтобы найти выраженіе площади нашего тр-ка въ прямоугольной системѣ, выражаемъ $\sin(\varphi_2-\varphi_1)$ черезъ синусы и косинусы угловъ φ_2 и φ_1 и замѣняемъ полярныя координаты r и φ прямолинейными x, y по формуламъ (3):

$$\Delta OP_1P_2 = \frac{1}{2} r_1 r_2 (\sin\varphi_2 \cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 \sin\varphi_1) =$$

$$= \frac{1}{2}(r_1\cos\varphi_1 \cdot r_2 \sin\varphi_2 - r_2 \cos\varphi_2 \cdot r_1 \sin\varphi_1).$$

$$\Delta OP_1P_2 = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1) \quad \ldots (11).$$

или въ видѣ опредѣлителя:

$$\Delta OP_1P_2 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1, & y_1 \\ x_2, & y_2 \end{vmatrix} \quad \ldots (11^a).$$

Если вершины тр-ка взять въ другой послѣдовательности, то получимъ

$$\Delta OP_2P_1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2, & y_2 \\ x_1, & y_1 \end{vmatrix}$$

Такъ какъ по свойству II опредѣлителей (стр. 11) $\begin{vmatrix} x_1, & y_1 \\ x_2, & y_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x_2, & y_2 \\ x_1, & y_1 \end{vmatrix}$, то

$$\Delta OP_1P_2 = -\Delta OP_2P_1,$$

такъ что мы и здѣсь видимъ, что знакъ выраженія для площади тр-ка зависитъ отъ того, въ какой послѣдовательности берутся его вершины.

Перейдемъ теперь къ общему случаю, когда ни одна изъ вершинъ тр-ка не совпадаетъ съ началомъ.

Пусть данъ треугольникъ $P_1P_2P_3$ координатами вершинъ $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$. Задачу можно привести къ предыдущей введеніемъ новой координатной системы, оси которой параллельны осямъ данной системы, и начало

Фиг. 18.

которой находится въ одной изъ вершинъ тр-ка, напр. въ P_3. Обозначимъ координаты точекъ $P_1 P_2$ въ новой системѣ черезъ x_1', y_1' и x_2', y_2'; тогда получимъ:

$$\Delta P_1 P_2 P_3 = \frac{1}{2}(x_1' y_2' - x_2' y_1').$$

Подставивъ теперь по формуламъ (5):

$$x_1' = x_1 - x_3. \qquad x_2' = x_2 - x_3$$

$$y_1' = y_1 - y_3 \qquad y_2' = y_2 - y_3,$$ получимъ:

$$\Delta P_1 P_2 P_3 = \frac{1}{2}\left[(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_3 y_2 - x_1 y_3 + x_3 y_3 - x_2 y_1 + x_3 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_3).$$

$$\Delta P_1 P_2 P_3 = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_1 - x_1 y_3) \ldots (12).$$

Подробнѣе разсмотрѣвъ послѣднее выраженіе, замѣчаемъ въ немъ нѣкоторую правильность. Именно, разложивъ выраженіе въ скобкахъ на три слагаемыхъ, $x_1 y_2 - x_2 y_1$, $x_2 y_3 - x_3 y_2$, $x_3 y_1 - x_1 y_3$, мы видимъ, что второе и третье слагаемыя можно получить изъ перваго, замѣнивъ указатели 1, 2 черезъ 2, 3 и 3, 1 при помощи слѣдующаго символа (фг. 19)

фиг. 19.

Этотъ способъ носитъ названіе круговой перестановки.

Еще легче запомнить формулу, если представить ее въ видѣ

определителя:

$$\Delta P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right\}$$

$$\Delta P_1 P_2 P_3 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \text{------} (12^a).$$

Итакъ мы можемъ сказать, что площадь тр-ка, вершины котораго имѣютъ координаты $P_1(x_1 y_1)$, $P_2(x_2 y_2)$, $P_3(x_3 y_3)$ выражается формулою (12^a), причемъ это выраженіе получаетъ положительное или отрицательное значеніе, смотря по тому, останется ли тр-къ по лѣвую или по правую сторону, при обходѣ отъ P_1 черезъ P_2 къ P_3 и до P_1. Отсюда, если дана прямая P_1P_2, то, взявъ третью вершину P_3 тр-ка гдѣ-нибудь по лѣвую сторону прямой P_1P_2, получимъ, что площадь тр-ка будетъ положительною. Если же третью вершину взять гдѣ-нибудь по правую сторону, то площадь тр-ка $P_1P_2P_3''$ будетъ отрицательна.—Если взять третью точку на самой прямой P_1P_2, то площадь новаго тр-ка должна служить переходомъ отъ отрицательныхъ къ положительнымъ значеніямъ,

фиг. 20

что есть должна равняться нулю. Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ всѣ стороны тр-ка сливаются съ прямою P_1P_2, т.е. площадь его равна нулю. Тогда можемъ написать:

$$\begin{vmatrix} 1, & x, & y. \\ 1, & x_1, & y_1 \\ 1, & x_2, & y_2 \end{vmatrix} = 0 \ldots\ldots (13).$$

Это ур-іе имѣетъ мѣсто для всякой точки $P(x,y)$, если только она лежитъ на данной прямой, т.е. всѣ точки, лежащія на прямой, удовлетворяютъ ур-ію (13). Поэтому полученное ур-іе есть <u>ур-іе прямой</u>, проходящей черезъ двѣ данныя точки $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$.

Если въ приведенномъ ур-іи (13) прямой линіи вторую строку вычтемъ изъ первой, а третью изъ второй, то получимъ:

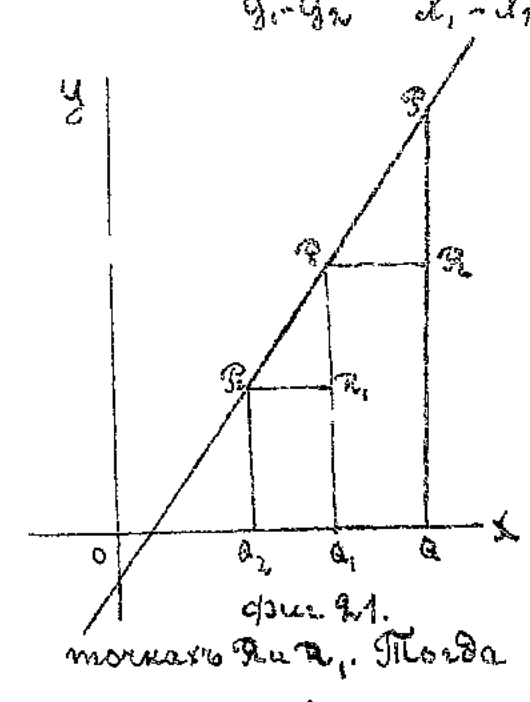
$$0 = \begin{vmatrix} 0 & x-x_1 & y-y_1 \\ 0 & x_1-x_2 & y_1-y_2 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_1-x_2 & y_1-y_2 \end{vmatrix}$$

$$(x-x_1)(y_1-y_2)-(x_1-x_2)(y-y_1)=0.$$

$$(x-x_1)(y_1-y_2)=(x_1-x_2)(y-y_1).$$

Отсюда вытекаетъ ур-іе прямой, проходящей черезъ двѣ данныя точки еще въ другой формѣ:

$$\frac{y-y_1}{y_1-y_2}=\frac{x-x_1}{x_1-x_2} \quad \text{-------------} \quad (13^a).$$



фиг. 21.

Изъ точекъ P_1, P_2 и P прямой опустимъ перпендикуляры на OX и изъ P_1 и P_2 проведемъ параллели къ оси OX, которыя пересѣкаютъ перпендикуляры PQ и P_1Q_1 въ точкахъ R и R_1. Тогда

$$y_1-y_2=Q_1P_1-Q_2P_2=Q_1P_1-Q_1R_1=R_1P_1$$

$$x_1-x_2=OQ_1-OQ_2=Q_2Q_1=P_2R_1$$

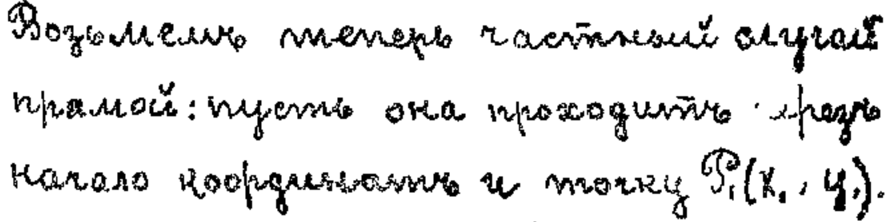
$$y-y_1=QP-Q_1P_1=QP-QR=RP.$$

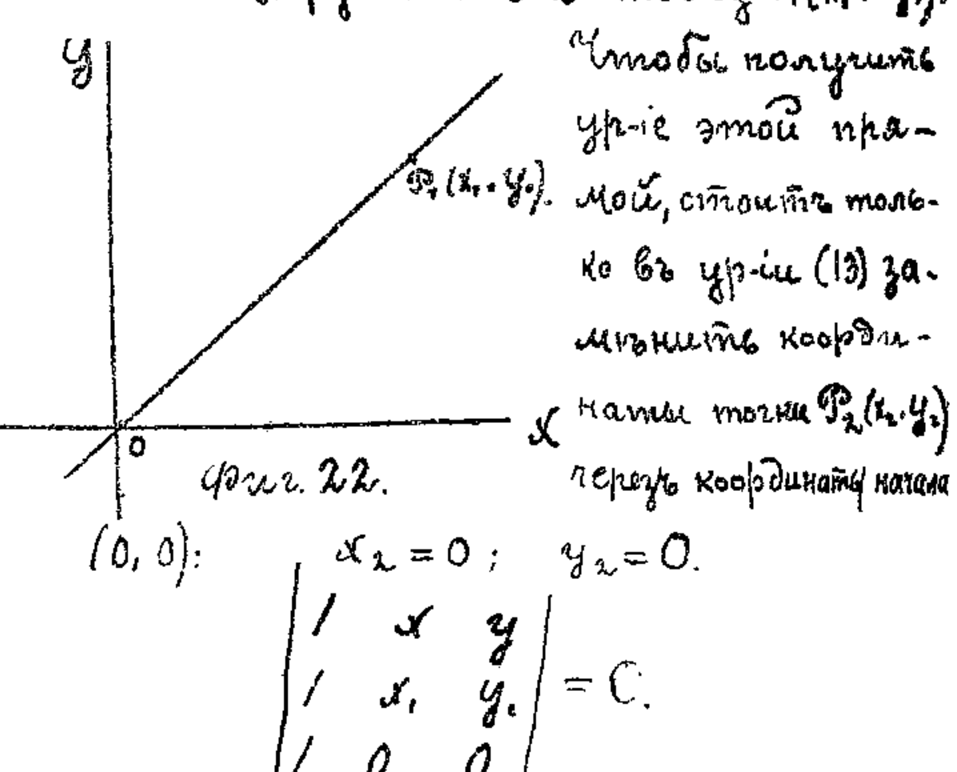
$$x-x_1=OQ-OQ_1=Q_1Q=P_1R.$$

Подставляя въ ур-іе (13^a), получаемъ:

$$\frac{RP}{R_1P_1}=\frac{P_1R}{P_2R_1},$$

т.е. извѣстную теорему о пропорціональности сторонъ подобныхъ тр-ковъ. Наоборотъ, если предположить извѣстною теорему о пропорціональности сторонъ подобныхъ треугольниковъ, то обратными заключеніями можно вывести ур-іе прямой въ видѣ (13^a).


Возьмемъ теперь частный случай прямой: пусть она проходитъ черезъ начало координатъ и точку $P_1(x_1, y_1)$.



Фиг. 22.

Чтобы получить ур-іе этой прямой, стоитъ только въ ур-іи (13) замѣнить координаты точки $P_2(x_2, y_2)$ черезъ координаты начала (0, 0):

$$x_2 = 0; \quad y_2 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Если разложить опредѣлитель по минорамъ 2-го порядка, принадлежащимъ къ первому столбцу, то первыя два слагаемыя будутъ равны нулю; останется:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = xy_1 - yx_1$$

Отсюда имѣемъ, что искомое ур-іе прямой, проходящей черезъ начало координатъ и точку (x_1, y_1), будетъ:

$$xy_1 - yx_1 = 0 \text{ ------ } (14).$$

Разсматривая это ур-іе находимъ, что оно первой степени по отношенію къ x и y; кромѣ того въ немъ нѣтъ

постояннаго члена. Такія ур-ія, въ которыхъ нѣтъ постояннаго члена, называются *однородными* ур-іями. Является вопросъ, всякое-ли однородное ур-іе первой степени представляетъ собою ур-іе прямой, проходящей черезъ начало координатъ.

Общій видъ однороднаго ур-ія 1ой степени:

$$Ax + By = 0 \text{-------} (15).$$

Если подставить:

$$A = \frac{y_1}{\lambda}; -B = \frac{x_1}{\lambda},$$ то ур-іе (15) переходитъ въ $\frac{xy_1}{\lambda} - \frac{yx_1}{\lambda} = 0 \text{-----} (16).$

или $xy_1 - yx_1 = 0$,

т.е. принимаетъ видъ ур-ія (14), такъ что дѣйствительно каждое однородное ур-іе первой степени представляетъ прямую, проходящую черезъ начало координатъ.

Изъ ур-ій для A и B мы имѣемъ

$$x_1 = -B\lambda; \quad y_1 = A\lambda.$$

Если придавать λ всевозможныя значенія отъ $+\infty$ до $-\infty$, то мы получимъ всѣ точки, принадлежащія прямой линіи.

Вернемся къ общему случаю прямой

не проходящей через начало координат. Положим дана прямая, пересѣкающая оси въ разстояніяхъ a и b отъ начала. Найдемъ уравненіе этой прямой.

Съ этою цѣлью стоитъ лишь въ ур-іи (13), вмѣсто x_1, y_1, x_2, y_2 подставить координаты точекъ A и B, т. е. приравнять

фиг. 23.

$$x_1 = a. \qquad x_2 = 0.$$
$$y_1 = 0. \qquad y_2 = b.$$

тогда получаемъ:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} = 0$$

или вычисливъ значеніе опредѣлителя

$$ab - xb - ya = 0.$$

Перемѣнимъ знаки и перенесемъ ab въ правую часть:

$$bx + ay = ab.$$

Дѣлимъ обѣ части н- ab:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \ldots\ldots\ldots (17).$$

Итакъ ур-іе (17) представляетъ ур-іе прямой линіи, отсѣкающей отъ осей отрѣзки a и b. Это ур-іе также 1-ой степени, но не однородное, ибо въ немъ есть

постоянный членъ. Но вообще всякое ур-іе первой степени, есть ур-іе прямой, въ чемъ нетрудно убѣдиться. Общій видъ ур-ія первой степени есть

$$Ax+By+C=0.$$

Перенеся постоянный членъ, получимъ

$$Ax+By=-C.$$

$$-\frac{A}{C}x-\frac{B}{C}y=1.$$

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1.$$

Такимъ образомъ ур-іе приведено къ виду (17), причемъ:

$$a=-\frac{C}{A};\ b=-\frac{C}{B}\ ----\ (18).$$

Итакъ мы получили, что ур-іе $1^{\text{ой}}$ степени $Ax+By+C=0$ изображаетъ прямую линію, пересѣкающую ось абсциссъ на разстояніи $-\frac{C}{A}$, а ось ординатъ на разстояніи $-\frac{C}{B}$ отъ начала. Если $C=0$, то прямая проходитъ черезъ начало координатъ и черезъ всѣ точки съ координатами $A\lambda$ и $-B\lambda$, причемъ λ можетъ принимать всѣ положительныя или отрицательныя значенія.
Если прямая параллельна къ оси $y^{\text{овъ}}$

и пересѣкаетъ ось $X^{овъ}$ на разстояніи a отъ начала, то ур-іе ея получимъ, если въ ур-іе (17) подставимъ $b=\infty$, т.е. искомое уравненіе будетъ

$$x=a\text{ ------- }(17^a).$$

Такимъ же образомъ получимъ ур-іе прямой параллельной оси $X^{овъ}$ и отстоящей отъ нея на разстояніи b:

$$y=b\text{ ------- }(17^b).$$

Если въ ур-іи (17^a) придать a частное значеніе $a=0$, то получимъ ур-іе прямой, параллельной оси $Y^{овъ}$ и пересѣкающей ось $X^{овъ}$ на разстояніи 0 отъ начала, т.е. проходящей черезъ начало; или, другими словами, мы получаемъ ур-іе оси $Y^{овъ}$:

$$x=0\text{ ----- }(17^c).$$

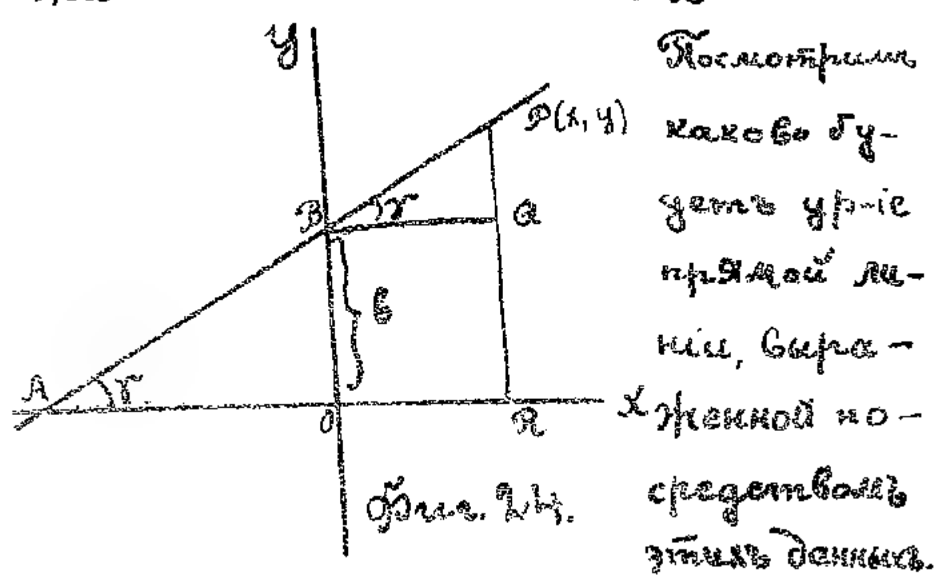
Такимъ же путемъ находимъ, что ур-іе оси $X^{овъ}$ есть

$$y=0\text{ ----- }(17^d).$$

Такъ какъ вообще ур-іе первой степени выражаетъ прямую линію, то такое ур-іе называется __линейнымъ__.

Пусть теперь положеніе прямой линіи опредѣлено разстояніемъ b, на которомъ она пересѣкаетъ ось ординатъ отъ начала и угломъ —

γ, образуемымъ его съ положительною частью оси $X^{\text{овъ}}$.



Фиг. 24.

Посмотримъ каково будетъ ур-іе прямой линіи, выраженной посредствомъ этихъ данныхъ.

Изъ произвольной точки $P(x, y)$ на данной прямой опускаемъ перпендикуляръ на ось $X^{\text{овъ}}$, а изъ B ведемъ параллель къ ней, пересѣкающую перпендикуляръ въ точкѣ Q. Тогда

$$\angle QBP = \angle OAB = \angle \gamma.$$

$$tg\,\gamma = \frac{QP}{BQ} = \frac{RP - RQ}{BQ} = \frac{RP - OB}{OR} = \frac{y - b}{x}$$

Освобождаемся отъ знаменателя:

$$x\,tg\,\gamma = y - b.$$

Расположивъ члены въ другомъ порядкѣ, получимъ ур-іе: $y = x\,tg\,\gamma + b$ ...... (19).

b называется начальною ординатою, $tg\,\gamma$ — угловымъ коэффиціентомъ прямой. Обозначая послѣдній черезъ m, получимъ

$$y = mx + b \text{ ...... } (19^a).$$

Чтобы изъ ур-ія прямой общаго вида

$$Ax+By+C=0$$

опредѣлить значеніе углового коэффиціента и начальной ординаты, слѣдуетъ только привести его къ виду (19), т.е. рѣшить относительно y:

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B};$$

тогда коэффиціентъ при x доставитъ намъ угловой коэффиціентъ

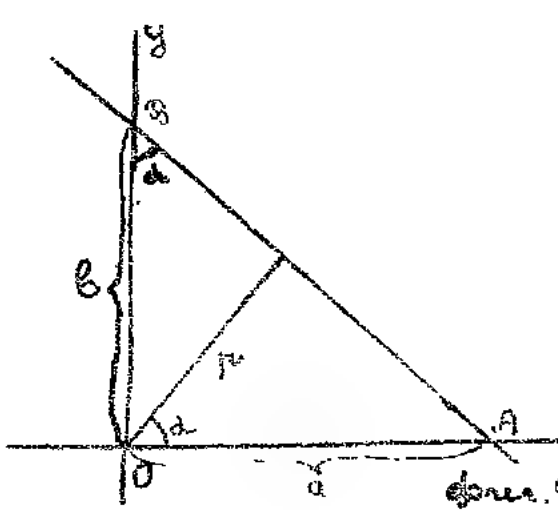
$$m=tg\,\gamma=-\frac{A}{B}, ----(20).$$

а постоянный членъ начальную ординату

$$b=-\frac{C}{B},$$

которая была уже раньше опредѣлена другимъ путемъ.

Познакомимся еще съ новымъ видомъ ур-ія прямой, когда данными величинами входятъ разстояніе p прямой отъ начала и уголъ α, образуемый перпендикуляромъ p съ положительною частью оси x-овъ. Обозначимъ отрѣзки от=



фиг. 25.

отсѣкаемые прямою отъ осей, опять через a и b. Тогда видно изъ чертежа, что

$$a = \frac{p}{\cos\alpha}, \quad b = \frac{p}{\sin\alpha}.$$

Подставивъ эти значенія въ формулу (17), получаемъ:

$$\frac{x\cos\alpha}{p} + \frac{y\sin\alpha}{p} = 1,$$

отсюда

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p \text{ ------ } (21).$$

Ур-іе (21) называется уравненіемъ прямой въ <u>нормальной формѣ</u>.

Чтобы изъ общаго ур-ія прямой линіи

$$Ax + By + C = 0$$

опредѣлить значенія $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ и p, приведемъ его къ виду (21). Перенеся C въ правую часть, получимъ:

$$Ax + By = -C \text{ ---- } (22).$$

Въ уравненіи (21) замѣчаемъ, что сумма квадратовъ коэффиціентовъ при x и y равна единицѣ:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Поэтому умножимъ уравненіе (22) на нѣкоторое число μ.

$$\mu Ax + \mu By = -\mu C \text{ ---- } (23).$$

и придадимъ μ такое значеніе, чтобы сумма квадратовъ коэффиціентовъ при x и y приравнялась единицѣ, т. е. опредѣляемъ μ изъ ур-ія

$$\mu^2 A^2 + \mu^2 B^2 = 1.$$

$$\mu^2 (A^2 + B^2) = 1.$$

$$\mu^2 = \frac{1}{A^2 + B^2}; \quad \mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Подставимъ полученное значеніе μ въ ур-іе (23):

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

Сравнивая полученное ур-іе съ ур-іемъ (21), находимъ значенія $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ и p:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}; \; \sin\alpha = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \cdots (24).$$

$$p = \frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2}} \text{ - - - - - - - } (25)$$

Положеніе прямой однозначно опредѣлено, если p всегда положительно, а уголъ α можетъ принимать значенія отъ 0 до 4 d. Чтобы p получилось положительнымъ, надо взять корень со знакомъ плюсъ, если C отрицательно, и со знакомъ минусъ, если C положительно.

Задача. Найти разстояніе отъ данной точки до данной прямой.

Пусть дана прямая $Ax + By + C = 0$ и точка...

фиг. 26.

$P_1(x_1, y_1)$. Принявъ новую систему координатъ $X'P_1Y'$, начало которой совпадаетъ съ точкой P_1 и оси которой параллельны первоначальнымъ, имѣемъ по формулѣ (5^a):

$$x = x' + x_1$$
$$y = y' + y_1$$

Подставимъ въ ур-іе данной прямой:

$$A(x' + x_1) + B(y' + y_1) + C = 0.$$
$$Ax' + By' + Ax_1 + By_1 + C = 0.$$

Теперь задача приведена къ только что рѣшенной задачѣ: найти разстояніе отъ данной прямой до начала координатной системы. Такъ какъ постояннымъ членомъ теперь служитъ $Ax_1 + By_1 + C$, то по формулѣ (25) искомое разстояніе: $p = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ - - - (26).

Итакъ, чтобы получить разстояніе точки $P_1(x_1, y_1)$ отъ прямой $Ax + By + C = 0$, надо привести ур-іе къ нормальной формѣ

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

и замѣнить тогда x и y на x_1 и y_1.

<u>Задача.</u> Опредѣлить уголъ ϑ, заключающійся между двумя прямыми.

Фиг. 27

Углы, образуемые данными прямыми l и l'

съ положительною частью оси $x^{овъ}$ обозначимъ соотвѣтственно черезъ γ и γ', тогда, по извѣстной изъ планиметріи теоремѣ, что внѣшній уголъ треугольника равенъ суммѣ противолежащихъ внутреннихъ.

$$\vartheta = \gamma' - \gamma,$$

слѣдовательно.

$$tg\,\vartheta = tg(\gamma'-\gamma) = \frac{tg\gamma' - tg\gamma}{1+tg\gamma' tg\gamma}.$$

Если прямыя даны ур-ями:

$$y = mx + b.$$
$$y = m'x + b',$$

то по стр (47) $tg\gamma = m$, $tg\gamma' = m'$, слѣдовательно

$$tg\,\vartheta = \frac{m' - m}{1+m'm} \text{ - - - - } (27).$$

Если же прямыя даны въ общемъ видѣ:

$$Ax + By + C = 0, \qquad y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$
$$A'x + B'y + C' = 0,$$

то по формулѣ (20)

$$tg\gamma = -\frac{A}{B},\ tg\gamma' = -\frac{A'}{B'},$$

отсюда $$tg\,\vartheta = \frac{-\frac{A'}{B'} + \frac{A}{B}}{1+\frac{A'}{B'}\cdot\frac{A}{B}}.$$

Умноживъ числителя и знаменателя на BB', получимъ

$$tg\,\vartheta = \frac{-A'B + AB'}{BB' + AA'} \text{ или}$$

$$tg\,\vartheta = \frac{AB' - A'B}{AA' + BB'} \text{ - - - - - - } (28).$$

Слѣдствіе I: Если въ данномъ случаѣ двѣ прямыя параллельны, то $tg\,\vartheta=0$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы числитель въ формулѣ (28) равнялся нулю:

$$AB'-A'B=0 \quad \text{-----} \quad (29).$$

Это условіе можно также представить въ такомъ видѣ:

$$AB'=A'B, \text{ откуда}$$

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'},$$

т. е., чтобы прямыя были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы коэффиціенты при x и y были пропорціональны.

Изъ ур-ія (29) слѣдуетъ, что

$$B'=\frac{A'B}{A}$$

Подставляя это значеніе въ ур-іе второй прямой, получимъ:

$$A'x+\frac{A'B}{A}y+C'=0.$$

Умножимъ на $\frac{A}{A'}$:

$$Ax+By+\frac{C'A}{A'}=0,$$

Если обозначить постоянный членъ черезъ D, то получимъ:

$$Ax+By+D=0,$$

т. е. уравненіе параллельныхъ прямыхъ можно всегда привести къ такому виду, чтобы они отличались лишь постояннымъ

членомъ.

Слѣдствіе II. Если прямыя перпендикулярны, то

$$tg\,\vartheta = \pm\infty.$$

Въ такомъ случаѣ знаменатель выраженія (28) равенъ нулю и мы получаемъ условіе перпендикулярности двухъ данныхъ прямыхъ:

$$AA' + BB' = 0 \quad \text{- - - -} \quad (30).$$

Задача. Опредѣлить точку пересѣченія прямыхъ

I. $Ax + By + C = 0$ и

II. $A'x + B'y + C' = 0.$

Координаты искомой точки мы очевидно получимъ, если рѣшимъ систему этихъ двухъ ур-ій.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -C & B \\ -C' & B' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} A & -C \\ A' & -C' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}}.$$

Предположимъ, что кромѣ двухъ пересѣкающихся прямыхъ I и II, намъ дана еще третья прямая $A''x + B''y + C'' = 0$, проходящая черезъ точку пересѣченія первыхъ двухъ. Въ такомъ случаѣ координаты этой точки пересѣченія должны удовлетворять уравненію третьей прямой:

$$A'' - \frac{\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}} - B'' - \frac{\begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}} + C'' = 0.$$

Уничтожимъ знаменателя:

$$A''\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix} - B''\begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix} + C''\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} = 0$$

Это выраженіе представляетъ разложеніе слѣдующаго опредѣлителя 3^го^ порядка по минорамъ 3^ей^ строки.

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 0 \text{ -------- } (31).$$

Итакъ, чтобы три прямыя проходили черезъ одну точку надо, чтобы опредѣлитель составленный изъ коэффиціентовъ и постоянныхъ членовъ равнялся нулю. Мы знаемъ изъ алгебры, что три ур-ія съ двумя неизвѣстными въ общемъ нельзя рѣшить, Но если они удовлетворяютъ условію (31), товъ этомъ частномъ случаѣ они имѣютъ общее рѣшеніе. Доказавъ необходимость этого условія, докажемъ теперь его достаточность. Обозначимъ точку пересѣченія первыхъ двухъ прямыхъ черезъ (ξ, η). Т. к. эта эта точка лежитъ на первой и на второй прямыхъ, то координаты ея удовлетворяютъ ур-іямъ обѣимъ

прямыхъ и мы можемъ написать:

$$\left.\begin{array}{l} A\xi + B\eta + C = 0 \\ A'\xi + B'\eta + C' = 0 \end{array}\right\} \text{------} (32).$$

Достаточность нашего условія будетъ очевидна, если при посредствѣ опредѣлителя (31) удастся доказать, что эта точка лежитъ и на третьей прямой, т.е., что

$$A''\xi + B''\eta + C'' = 0 \text{-----} (33).$$

Изъ уравненій (32) имѣемъ:

$$C = -A\xi - B\eta.$$
$$C' = -A'\xi - B'\eta.$$

Подставимъ эти значенія въ опредѣлитель (31):

$$\begin{vmatrix} A, & B, & -A\xi - B\eta \\ A', & B', & -A'\xi - B'\eta \\ A'', & B'', & C'' \end{vmatrix} = 0$$

Прибавивъ къ элементамъ 3^{го} столбца элементы перваго, умноженные на ξ, и элементы второго, умноженные на η, получимъ по свойству IV опредѣлителей (стр. 34).

$$\begin{vmatrix} A, & B, & 0 \\ A', & B', & 0 \\ A'', & B'' & A''\xi + B''\eta + C'' \end{vmatrix} = 0$$

Разложимъ по минорамъ, получимъ:

$$(A''\xi + B''\eta + C'')(AB' - A'B) = 0.$$

Произведенiе равно нулю, если одинъ изъ множителей равенъ нулю. Но второй множитель не можетъ равняться нулю, ибо тогда прямыя были-бы параллельны, что противорѣчитъ условiю.

Значитъ: $A''\xi + B''\eta + p'' = 0$.

Т.е. мы получили ур-iе (33) изъ котораго ясно, что точка (ξ, η) лежитъ и на третьей прямой. Слѣдовательно, условiе (31) <u>необходимо</u> и <u>достаточно</u> для того, чтобы три прямыя пересѣкались въ одной точкѣ.

До сихъ поръ мы познакомились со слѣдующими видами уравненiй прямой линiи общаго положенiя:

a) $\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0.$

б). $\dfrac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \dfrac{x - x_1}{x_1 - x_2}.$

} Прямая проходитъ черезъ двѣ точки съ координатами x_1, y_1 и x_2, y_2.

c) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1.$ { Прямая пересѣкаетъ координатныя оси въ разстоянiяхъ a, b отъ начала.

д). $y = mx + b.$ { Прямая опредѣлена начальною ординатою b и угловымъ коэффицiентомъ m.

e) $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$. Прямая задана длиной p перпендикуляра, опущеннаго на неё, изъ начала, и угломъ α между этимъ перпендикуляромъ и положительною частью оси $X^{овъ}$

Общій видъ всѣхъ этихъ ур-ій есть:

$$Ax + By + C = 0. \quad X = \frac{A}{\ } \quad \ldots$$

Соотвѣтственными ограниченіями величинъ, опредѣляющихъ положеніе прямой, изъ этихъ формулъ мы получаемъ еще слѣдующія ур-ія:

f) $y_1x - x_1y = 0$. Уравненіе прямой проходящей черезъ начало координатъ и точку (X_1, Y_1).

Общій видъ уравненія:

$$Ax + By = 0.$$

g). $x = a$. Ур-іе прямой, параллельной оси $Y^{овъ}$ и отстоящей отъ нея на разстояніи a.

Общій видъ уравненія:

$$Ax + C = 0.$$

h) $y = b$ Ур-іе прямой, параллельной оси $X^{овъ}$ и отстоящей отъ нея на разстояніи b.

Общій видъ уравненія:

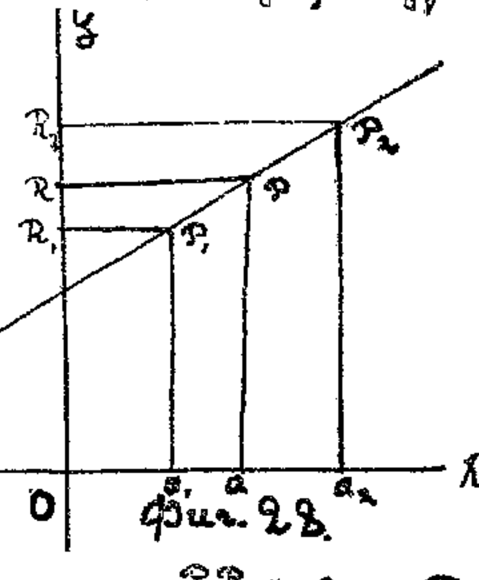
$$By + C = 0.$$

i). $x = 0$. Уравненіе оси $Y^{овъ}$

k). $y = 0$. Уравненіе оси $X^{овъ}$

До сихъ поръ у насъ прямая линія —

выражались однимъ ур-іемъ. Познакомимся теперь съ методами изображенія ея помощью двухъ ур-ій. Пусть будутъ даны двѣ точки P_1 и P_2.



Фиг. 28.

Соединивъ эти точки прямою, можемъ сказать, что положеніе каждой точки P на ней будетъ вполнѣ опредѣлено, коль скоро намъ извѣстно отношеніе $\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda$. Если P, приближаясь къ точкѣ P_1, совпадаетъ съ нею, то $P_1P=0$, откуда $\lambda=0$. Если же P находится между P_1 и P_2, то принимая во вниманіе, что P_1P и PP_2 измѣряются по тому же направленію, находимъ, что λ должно имѣть нѣкоторое положительное значеніе, увеличивающееся по мѣрѣ приближенія P къ P_2. Когда P совпадаетъ съ P_2, то $PP_2=0$ и $\lambda=\infty$. Если P перейдетъ за точку P_2 (т. е. будетъ лежать внѣ отрѣзка P_1P_2), то P_1P и PP_2 имѣютъ противоположныя направленія, слѣдовательно λ будетъ имѣть нѣкоторое отрицательное значеніе. Схематически можно это обозначить такъ:

P	$-\infty$	P_1	P_2	$+\infty$
λ	$-1.$	0	$\pm\infty$	$-1.$

Итакъ, каждому положенію P соотвѣтствуетъ опредѣленное значеніе λ, и, обратно, для каждаго значенія λ, точка P занимаетъ опредѣленное положеніе ~~на прямой~~.

Опустивъ перпендикуляры изъ точекъ P, P_1, P_2 на ось абсциссъ, находимъ:

$$\lambda = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{Q_1Q}{QQ_2} = \frac{x-x_1}{x_2-x}.$$

Если опустимъ перпендикуляры на ось ординатъ, то получимъ:

$$\lambda = \frac{R_1R}{RR_2} = \frac{y-y_1}{y_2-y}$$

Изъ этихъ ур-ій легко опредѣлить x и y

$$x-x_1 = \lambda(x_2-x) = \lambda x_2 - \lambda x$$

$$x+\lambda x = x_1 + \lambda x_2.$$

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$$

$$y-y_1 = \lambda(y_2-y) = \lambda y_2 - \lambda y$$

$$y+\lambda y = y_1+\lambda y_2.$$

$$y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Мы видѣли, что положеніе точки P, а слѣдовательно и величина координатъ ея x и y зависитъ отъ λ. Слѣдовательно, придавая произвольныя значенія для λ, получимъ каждый разъ опредѣленное значеніе для x и y. Получаемое геометрическое мѣсто будетъ

конечно прямая, проходящая черезъ точки $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$. Итакъ прямая линія выразилось совокупностью ур—ій:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \end{array}\right\} \text{----} (34).$$

или: точка P, дѣлящая отрѣзокъ P_1P_2 въ отношеніи $\frac{P_1P}{PP_2} = \lambda$, имѣетъ координаты (34). Если точка P находится на среднемъ разстояніи между точками P_1 и P_2, то $P_1P = PP_2$, слѣдовательно, $\lambda = \frac{P_1P}{PP_2} = 1$, и координаты точки P мы получимъ, подставивъ въ ур-іе (34) единицу вмѣсто λ:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \text{ ----} (34^a).$$

Положимъ еще, что дана прямая точкою $L(b, m)$ и угломъ наклоненія γ къ оси абсциссъ.

(фиг. 2)

Положеніе произвольной точки на этой прямой будетъ опредѣлено, какъ скоро намъ будетъ извѣстно ея разстояніе $LP = r$ отъ точки L. Принявъ L за начало новой системы $x'Ly'$

оси которой параллельны первоначальным осямъ, можемъ написать:

$$\left.\begin{array}{l} x' = u \cos\gamma \\ y' = u \sin\gamma \end{array}\right\} \text{------} (35).$$

Замѣчая, что по формуламъ (5):

$$x' = x - l$$
$$y' = y - m,$$

подставляемъ эти значенія въ ур-іе (35):

$$x - l = u \cos\gamma.$$
$$y - m = u \sin\gamma.,$$

откуда

$$\left.\begin{array}{l} x = l + u \cos\gamma \\ y = m + u \sin\gamma. \end{array}\right\} \text{----} (36)$$

Придавая всевозможныя значенія для u, получаемъ соотвѣтственныя значенія для x и y. Точкамъ, лежащимъ по одну сторону отъ L, соотвѣтствуютъ положительныя значенія u, а точкамъ по другую сторону отъ L отрицательныя значенія u.

Изслѣдованіе уравненія $Ax^2 + By^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$.

Уже раньше (стр. 44) мы нашли, что ур-іе круга, центръ котораго (a, b), а радіусъ r, есть:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \text{------} (37).$$

Раскрываемъ скобки и переносимъ r^2 влѣво

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0 \text{-----} (38).$$

Это ур-іе есть частный видъ слѣдующаго общаго ур-ія

$$Ax^2+By^2+2Dx+2Ey+F=0 \text{------} (39).$$

Является вопросъ, изображаетъ ли ур-іе (39) всегда кругъ. Очевидно, что оно будетъ изображать кругъ, если намъ удается привести его къ виду (37) или (38), т.е. опредѣлить координаты центра и радіусъ при помощи коэффиціентовъ A, B, D, E и F.

Ясно, что ур-іе (39) можно привести къ виду (38) только въ томъ случаѣ, когда $A=B$, т.е. когда данное ур-іе имѣетъ болѣе спеціальный видъ:

$$Ax^2+Ay^2+2Dx+2Ey+F=0 \text{-----} (40).$$

Въ ур-іи (38) коэффиціенты при x и y равны единицѣ; поэтому, чтобы привести ур-іе (40) къ виду (38), раздѣлимъ его на A:

$$x^2+y^2+2\frac{D}{A}x+2\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0.$$

Дальше замѣчаемъ, что въ ур-іи (37) лѣвая часть состоитъ изъ суммы двухъ квадратовъ. Чтобы ур-ію (40) придать подобную форму, разсмотримъ сумму членовъ:

$x^2+2\frac{D}{A}x$

какъ первые два члена, получившіеся отъ разложенія:

$$\left(x+\frac{D}{A}\right)^2=x^2+2\frac{D}{A}x+\frac{D^2}{A^2}.$$

Чтобы получить полный квадратъ, слѣдуетъ къ суммѣ $x^2+2\frac{D}{A}x$ прибавить $\frac{D^2}{A^2}$, а чтобы ур-іе не измѣнилось, вычтемъ ту же величину. Такъ же поступаемъ относительно суммы $y^2+2\frac{E}{A}y$. Тогда получаемъ:

$$x^2+2\frac{D}{A}x+\frac{D^2}{A^2}+y^2+2\frac{E}{A}y+\frac{E^2}{A^2}+\frac{F}{A}-\frac{D^2}{A^2}-\frac{E^2}{A^2}=0,$$

$$\left(x+\frac{D}{A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{A}\right)^2=\frac{D^2+E^2-AF}{A^2}\quad\text{....}(41).$$

Сравнивая ур-іе (41) съ ур-іемъ (37) видимъ, что ур-іе (41), а слѣдовательно и (40) изображаютъ кругъ, координаты центра котораго суть:

$$a=-\frac{D}{A};\quad b=-\frac{E}{A},$$

а радіусъ

$$r=\frac{1}{A}\sqrt{D^2+E^2-AF}.$$

Дѣйствительныя значенія r получаются только для положительныхъ значеній подкореннаго количества, т. е. ур-іе (40) изображаетъ въ дѣйствительности кругъ только, когда

$$D^2+E^2>AF.$$

Такимъ образомъ мы получаемъ слѣдующую теорему:

Ур-іе $Ax^2+By^2+2Dx+2Ey+F=0$ въ случаѣ $A=B$ представляетъ кругъ, центръ котораго имѣетъ координаты $a=-\frac{D}{A}$ и $b=-\frac{E}{A}$, а радіусъ котораго $r=\frac{1}{A}\sqrt{D^2+E^2-AF}$.

Задача. Опредѣлить точки пересѣченія прямой съ окружностью.

Пусть ур-іемъ круга будетъ

$$Ax^2+By^2+2Dx+2Ey+F=0 \text{ -----} (42),$$

ибо мы всегда можемъ предположить, что $A=B$. Далѣе пусть прямая дана двумя точками $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$. Точки пересѣченія ея съ окружностью назовемъ R_1 и R_2. Мы знаемъ (стр. 60), что координаты каждой точки, лежащей на прямой P_1P_2 даются слѣдующими формулами:

фиг. 30.

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \text{ ---} (43).$$

Такъ какъ значенія x и y зависятъ отъ λ, то вопросъ состоитъ въ томъ, чтобы опредѣлить значеніе λ, соотвѣтствующее координатамъ точекъ R_1 и R_2,

Такъ какъ эти точки лежатъ на окружности, то координаты ихъ должны удовлетворять ур-iю (42), слѣдовательно, подставивъ значенія (43) x и y въ ур-iе (42), мы получимъ ур-iе, изъ котораго можемъ опредѣлить λ.

$$A\frac{(x_1+\lambda x_2)^2}{(1+\lambda)^2}+B\frac{(y_1+\lambda y_2)^2}{(1+\lambda)^2}+2D\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}+2E\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}+F=0$$

Освобождаемъ отъ знаменателя:

$$A(x_1+\lambda x_2)^2+B(y_1+\lambda y_2)^2+2D(x_1+\lambda x_2)(1+\lambda)+2E(y_1+\lambda y_2)(1+\lambda)+$$
$$+F(1+\lambda)^2=0.$$

Располагаемъ по степенямъ λ:

$$\lambda^2(Ax_2^2+By_2^2+2Dx_2+2Ey_2+F)+2\lambda\left[Ax_1x_2+By_1y_2+D(x_1+x_2)+E(y_1+y_2)+F\right]+$$
$$+Ax_1^2+By_1^2+2Dx_1+2Ey_1+F=0 \text{ - - - - - } (44).$$

Мы получили квадратное ур-iе, изъ котораго можемъ получить два значенія для λ. Подставляя ихъ въ ур-iя (43), получаемъ по два значенія для x и y. Значитъ прямая пересѣкаетъ кругъ въ двухъ точкахъ. Корни ур-iя (44) имѣютъ слѣдующее геометрическое значенiе:

$$\lambda_1=\frac{P_1R_1}{R_1P_2};\ \lambda_2=\frac{P_1R_2}{R_2P_2}\text{ - - - - } (45).$$

Пусть теперь прямая дана двумя точками, изъ которыхъ одна уже лежитъ на окружности, напр., точка $P_1(x_1,y_1)$. Въ такомъ случаѣ координаты

Фиг. 31.

точки P_1 удовлетворяютъ ур-ію (42):

$$Ax_1^2+By_1^2+2Dx_1+2Ey_1+F=0 \ldots\ldots (46).$$

Отсюда ур-іе (44) принимаетъ видъ:

$$\alpha\lambda^2+2\beta\lambda=0 \ldots\ldots\ldots (47),$$

причемъ $\alpha=Ax_2^2+By_2^2+2Dx_2+2Ey_2+F$,

$$\beta=Ax_1x_2+By_1y_2+D(x_1+x_2)+E(y_1+y_2)+F.$$

Корни ур-ія (47) въ этомъ случаѣ будутъ:

$$\lambda_1=0,\quad \lambda_2=-\frac{2\beta}{\alpha}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, одинъ изъ корней долженъ быть равенъ нулю, такъ какъ по первой формулѣ (48)

$$\lambda_1=\frac{P_1R_1}{R_1R_2},$$

а въ нашемъ случаѣ точки P_1 и R_1 сливаются, т.е. $\lambda_1=0$.

Положимъ теперь, что прямая P_1P_2 вращается около точки P_1, такъ что точка R_2 все болѣе приближается къ точкѣ P_1. Тогда соотвѣтственное значеніе λ_2 все уменьшается и, когда прямая переходитъ въ положеніе касательной къ кругу, то λ_2 дѣлается равнымъ нулю. Но чтобы λ_2 равнялось нулю, необходимо имѣть: $\beta=0$, т.е. $Ax_1x_2+By_1y_2+D(x_1+x_2)+E(y_1+y_2)+F=0$. Это выраженіе всегда равно нулю, если точка P_1 лежитъ на окружности, а P_2 гдѣ-нибудь на касательной къ кругу

въ точкѣ P_1. Замѣнимъ обозначеніе x_1, y_1 черезъ x и y, тогда получимъ ур-іе касательной къ данному кругу въ точкѣ x_1, y_1:

$$Ax_1x+By_1y+D(x_1+x)+E(y_1+y)+F=0 \quad ---- (48).$$

или, отдѣливъ члены съ x и y:

$$x(Ax_1+D)+y(By_1+E)+Dx_1+Ey_1+F=0 \quad ---- (49).$$

Сравнивая ур-іе (38) съ ур-іемъ (49), имѣемъ:

$$A=1;\ B=1;\ D=-a;\ E=-b;\ F=a^2+b^2-r^2.$$

Подставляя эти значенія въ ур-іе (49) получимъ ур-іе касательной къ кругу (38): стр. 62

$$x(x_1-a)+y(y_1-b)-ax_1-by_1+a^2+b^2-r^2=0,$$

$$x(x_1-a)+y(y_1-b)-a(x_1-a)-b(y_1-b)=r^2,$$

$$(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=r^2,$$

т.е. прямая, касающаяся круга $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ въ точкѣ $(x_1 y_1)$ имѣетъ ур-іе:

$$(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=r^2 \quad ---- (50).$$

Все изложенное остается справедливымъ и въ томъ случаѣ, если A не равно B. Мы нашли, что кривая, выраженная ур-іемъ (49) стр. 64 пересѣкается прямою въ двухъ точкахъ. Такая кривая называется кривою второго порядка. Уравненіе ея касательной есть уравненіе (49).

Мы знаемъ, что въ центрѣ круга каждый діаметръ дѣлится пополамъ. Посмотримъ, не имѣется ли у кривой (42) точки, играющей по отношенію къ ней подобную же роль, т.е. такой точки, въ которой всѣ хорды проходящія черезъ нее, дѣлились бы ею пополамъ.

Фиг. 32.

Всѣ точки (стр. 61), лежащія на прямой, проходящей черезъ точку $M(l,m)$ и составляющей съ осью X овъ уголъ ϑ, даются формулами:

$$x = l + u\cos\vartheta.$$
$$y = m + u\sin\vartheta.$$

Чтобы найти точки пересѣченія этой линіи съ кривою (42), подставляемъ это выраженіе въ ур-іе кривой:

$$A(l+u\cos\vartheta)^2+B(m+u\sin\vartheta)^2+2D(l+u\cos\vartheta)+2E(m+u\sin\vartheta)+F=0.$$

Располагаемъ члены по степенямъ u:

$$u^2(A\cos^2\vartheta+B\sin^2\vartheta)+2u(Al\cos\vartheta+Bm\sin\vartheta+D\cos\vartheta+E\sin\vartheta)+$$
$$+Al^2+Bm^2+2Dl+2Em+F=0 \;\text{----}\; (51).$$

Мы получили квадратное ур-іе, имѣющее два рѣшенія, т.е. данная кривая пересѣкается прямою въ двухъ точкахъ, что уже было найдено нами другимъ путемъ. Если точка M дѣлитъ пополамъ прямую P_1P_2, то корни уравненія (51)

должны различаться только знаками, ибо точки P_1 и P_2 лежатъ по различныхъ сторонахъ отъ точки M на одинаковыхъ разстояніяхъ.

Если, вообще, дано квадратное ур-іе:

$$\alpha u^2 + 2\beta u + \gamma = 0,$$

то рѣшеніе его представляется въ видѣ:

$$u = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha}.$$

Эти рѣшенія только тогда равны по абсолютной величинѣ и различаются знакомъ, когда $\beta = 0$, т.е. центръ нашей кривой (42) существуетъ только тогда, когда коэффиціентъ при u въ ур-іи (51) равенъ нулю:

$$Al\cos\vartheta + Bm\sin\vartheta + D\cos\vartheta + E\sin\vartheta = 0 \ldots (52).$$

Такъ какъ всѣ хорды, проходящія черезъ точку M, по предположенію должны дѣлиться ею пополамъ, то $\angle\vartheta$ можетъ принимать произвольныя значенія, напр. $\vartheta = 0$; тогда $\sin\vartheta = 0$, $\cos\vartheta = 1$.

Подставляя эти значенія въ уравненіе (52), получаемъ:

$$Al + D = 0 \ldots\ldots\ldots (53).$$

Если $\vartheta = 90^\circ$, то

$$\sin\vartheta = 1, \quad \cos\vartheta = 0.$$

По подстановкѣ, ур-іе (52) принимаетъ видъ:

$$Bm + E = 0 \ldots\ldots\ldots (54).$$

Изъ ур-ій (53) и (54) мы можемъ получить координаты точки M:

$$l = -\frac{D}{A}; \quad m = -\frac{E}{B} \text{------} (55).$$

Такимъ образомъ мы нашли координаты той точки, въ которой всѣ хорды кривой дѣлятся пополамъ. Такая точка, по аналогіи съ соотвѣтственною точкою круга, называется центромъ кривой.

Если A и B не равны нулю, то кривая всегда имѣетъ центръ въ конечности. Разсмотримъ тотъ случай, когда кривая не имѣетъ центра, т.е. когда A или B равняется нулю. Если бы A и B оба равнялись нулю, то мы имѣли бы дѣло не съ кривой, а съ прямою линіею:

$$2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Положимъ, что въ ур-іи

$$Ax^2 + By^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

коэффиціентъ $A = 0$, т.е. пусть дано ур-іе

$$By^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \text{---} (56).$$

Чтобы получить уравненіе въ болѣе простомъ видѣ, перемѣщаемъ координатную систему параллельно самой себѣ, такимъ образомъ, что координаты новаго начала будутъ a и в, которыя пока будемъ считать неизвѣстными. Формулы пе-

ремещенія суть (59)

$$x = x' + a,$$

$$y = y' + b.$$

Подставляемъ эти значенія въ ур-іе (56):

$$B(y'+b)^2 + 2D(x'+a) + 2E(y'+b) + F = 0.$$

Располагаемъ по степенямъ x' и y':

$$By'^2 + 2Dx' + 2(Bb+E)y' + Bb^2 + 2Da + 2Eb + F = 0 \text{ --- } (57).$$

Чтобы ур-іе дѣйствительно приняло болѣе простой видъ, придадимъ теперь для a и b такія значенія, чтобы постоянный членъ и коэффиціентъ при y' обратились въ нули.

$$\left.\begin{array}{l} Bb + E = 0, \\ Bb^2 + 2Da + 2Eb + F = 0. \end{array}\right\} \text{ ----- } (58).$$

Рѣшая эти ур-ія мы опредѣляемъ координаты a и b новаго начала:

$$b = -\frac{E}{B},$$

и подставивъ это значеніе во второе изъ ур-ій (58), получаемъ:

$$\frac{E^2}{B} + 2Da - 2\frac{E^2}{B} + F = 0,$$

$$2BDa = E^2 - BF,$$

$$a = \frac{E^2 - BF}{2BD}.$$

Итакъ, это суть тѣ значенія для a и b, при которыхъ постоянный членъ и коэф-

фиціенты при y' обращаются въ нули. Слѣдовательно, подставляя эти значенія въ ур-іе (57), получаемъ:

$$By'^2 + 2Dx' = 0,$$

$$y'^2 = -2\frac{D}{B}x'.$$

Обозначаемъ $-\frac{D}{B}$ черезъ p:

$$\underline{y'^2 = 2px'} \quad \ldots\ldots\ldots (59).$$

Кривая, выраженная этимъ ур-іемъ наз<u>ы</u>вается <u>параболою</u>, а p — <u>параметромъ</u> ея. При дальнѣйшемъ изслѣдованіи, для простоты, пропустимъ верхніе указатели въ ур-іи (59), т. е. пусть ур-іе параболы будетъ

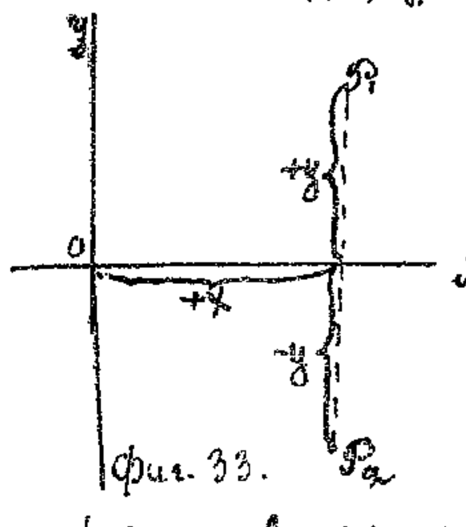
$$y^2 = 2px.$$

Рѣшая ур-іе относительно <u>y</u>, получаемъ:

$$y = \pm\sqrt{2px} \quad \ldots\ldots\ldots (60).$$

Если p положительно, то для y получаемъ дѣйствительное значеніе только при положительномъ значеніи x. Если же $p<0$, то, чтобы получить для y дѣйствительное значеніе, надо положить, что и x отрицательно. Изъ этого мы заключаемъ, что вся кривая расположена по одну сторону оси y<u>овъ</u>. Изъ уравненія (60) видно, что каж=

дому значенію x соотвѣтствуютъ два значенія для y, равныхъ по величинѣ, но различныхъ по знаку. Значитъ, если имѣемъ, что точка $P_1(+x, +y)$ принадлежитъ параболѣ,



Фиг. 33.

то непремѣнно существуетъ еще точка параболы P_2 съ координатами $(+x, -y)$. Слѣдовательно, парабола симметрична относительно оси $X^{овъ}$, которая называется главною осью параболы. Для $x=0$ находимъ, что и $y=0$, т. е. наша кривая проходитъ черезъ начало координатъ, такъ называемую вершину параболы. По формуламъ (60) можно построить сколько угодно точекъ параболы. Съ этою цѣлью, отъ произвольной точки Г на оси $X^{овъ}$ откладываемъ влѣво $2p$ и изъ полученной точки Q возставляемъ перпендикуляръ къ оси $X^{овъ}$. На ОГ, какъ на діаметрѣ, описываемъ окружность. Точки пересѣченія ея съ построеннымъ перпендикуляромъ принадлежатъ параболѣ. Дѣйствительно, соеди=

Фиг. 34.

нивъ точку P съ F и съ O, имѣемъ изъ прямоугольнаго тр-ка OPF:

$$QP^2 = QF \cdot OQ \text{, т. е.}$$

$$y^2 = 2px.$$

Избирая все новыя точки F_1, F_2, F_3 и т. д. получаемъ сколько угодно точекъ параболы. Мы видѣли, что ур-іе касательной есть (49):

$$x(Ax_1+D)+y(By_1+E)+Dx_1+Ey_1+F=0,$$

если кривая дана ур-іемъ:

$$Ax^2+By^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

Если же кривая задана ур-іемъ:

$$y^2-2px=0,$$

то $A=0$; $B=1$; $D=-p$; $E=0$; $F=0$.

Тогда <u>ур-іе касательной</u> принимаетъ видъ:

$$-px+y_1y-px_1=0.$$

$$y_1y=p(x+x_1) \text{ ------ } (61).$$

Мы доказали, что парабола проходитъ черезъ начало координатъ. Опредѣлимъ касательную къ параболѣ въ этой точкѣ. Для этого въ ур-іе касательной подставляемъ:

$$x_1=0, \quad y_1=0; \quad \text{получаемъ}$$

$$0=px, \quad x=0.$$

Мы получили ур-іе оси $y^{овъ}$, т. е. ось $y^{овъ}$ служитъ касательной къ параболѣ въ вершинѣ ея.

При помощи ур-ія (61) легко постро-

ить касательную любой точки параболы, напр., точки (x_1, y_1).
Найдемъ пересѣченіе касательной съ осью Xовъ, для чего и подставляемъ въ ея ур-іе $y=0$. Получаемъ:

$$p(x+x_1)=0.$$
$$x+x_1=0.$$
$$x=-x_1.$$

Т.е., чтобы построить касательную въ точкѣ (x_1, y_1), откладываемъ влѣво отъ начала длину x_1 и соединимъ полученную точку R съ точкою (x_1, y_1).

фиг. 35.

Вернемся опять къ болѣе общему ур-ію.

$$Ax^2+By^2+2Dx+2Ey+F=0 \quad \text{------} \quad (62).$$

Мы нашли (стр. 70), что если A и B различны отъ нуля, то кривая имѣетъ центръ, координаты котораго суть:

$$l=-\frac{D}{A}; \quad m=-\frac{E}{B}.$$

Наше ур-іе приметъ особенно простой видъ, если перенесемъ начало координатъ въ центръ кривой. Формулы перемѣщенія будутъ (52):

$$\left.\begin{aligned} x &= x'+l = x'-\frac{D}{A} \\ y &= y'+m = y'-\frac{E}{B} \end{aligned}\right\} \text{----} (63).$$

Подставляя эти формулы въ общее ур-іе (62), получаемъ ур-іе нашей кривой въ новой системѣ:

$$A\left(x'-\frac{D}{A}\right)^2+B\left(y'-\frac{E}{B}\right)^2+2D\left(x'-\frac{D}{A}\right)+2E\left(y'-\frac{E}{B}\right)+F=0.$$

Раскрываемъ скобки:

$$Ax'^2-2Dx'+D^2/A+By'^2-2Ey'+E^2/B+$$
$$+2Dx'-2D^2/A\qquad+2Ey'\;-2E^2/B+F=0$$

По сокращеніи получаемъ:

$$Ax'^2-\frac{D^2}{A}+By'^2-\frac{E^2}{B}+F=0$$

Отдѣляемъ члены съ x'^2 и y'^2

$$Ax'^2+By'^2=\frac{D^2}{A}+\frac{E^2}{B}-F,$$

$$Ax'^2+By'^2=\frac{BD^2+AE^2-ABF}{AB}$$

Вводя новое обозначеніе:

$$BD^2+AE^2-ABF=\delta,\;\text{------}\;(64)$$

получаемъ:

$$Ax'^2+By'^2=\frac{\delta}{AB}\;\text{----}\;(65).$$

I. Если A и B имѣютъ одинаковые знаки, что можно выразить неравенствомъ:

$$AB>0,$$

и если $\delta=0$, то получаемъ:

$$Ax'^2+By'^2=0$$

Сумма двухъ слагаемыхъ, имѣющихъ тотъ-же знакъ равна нулю только тогда, если оба слагаемыя равны нулю, т. е.:

$$Ax'^2=0,\;By'^2=0.$$

По условію A и B положительны, отсюда

$$x'=0\ ,\quad y'=0.$$

Подставляя эти значенія въ формулы (63), получимъ:

$$x=-\frac{D}{A}\ ,\quad y=-\frac{B}{A}\ ,$$

т.е. кривая сжимается въ точку $\left(-\frac{D}{A},-\frac{B}{A}\right)$.

II. Положимъ опять, что $AB>0$, т.е. A и B имѣютъ одинаковые знаки, но δ не равно нулю, а имѣетъ знакъ, отличный отъ A и B.

Раздѣляя ур-іе (65) на $\frac{\delta}{AB}$, получаемъ:

$$\frac{A^2B}{\delta}x'^2+\frac{AB^2}{\delta}y'^2=1.$$

Такъ какъ δ имѣетъ знакъ отличный отъ A и B, то оба члена лѣвой части отрицательны. Сумма же двухъ отрицательныхъ величинъ не можетъ равняться единицѣ, т.е. положительной величинѣ; значитъ полученное ур-іе вовсе не изображаетъ дѣйствительной кривой.

III. Наконецъ можемъ предположить, что AB и δ имѣютъ тотъ-же знакъ. Ур-іе (65) можно представить въ видѣ:

$$\frac{x'^2}{\frac{\delta}{A^2B}}+\frac{y'^2}{\frac{\delta}{AB^2}}=1\text{- - - -}(66).$$

Такъ какъ знаменатели обоихъ членовъ положительны (ибо A, B и δ имѣютъ одинаковые знаки), то можемъ принять:

$$\frac{\delta}{A^2 B} = a^2, \quad \delta/_{AB^2} = b^2.$$

Подставляя эти значенія въ ур-іе (66) получимъ:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Кривая изображаемая этимъ ур-іемъ называется эллипсомъ.

Итакъ, кривая, изображаемая ур-іемъ

$$Ax^2 + By^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

есть эллипсъ, когда A, B и $\delta = BD^2 + AE^2 - ABF$ имѣютъ одинаковые знаки.

Ур-іе эллипса относительно новой координатной системы, начало которой совпадаетъ съ центромъ эллипса $\left(-\frac{D}{A}, -\frac{E}{B}\right)$ имѣетъ видъ:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \text{ ------ } (67),$$

причемъ $a^2 = \delta/_{A^2B}$; $b^2 = \delta/_{AB^2}$.

Предположимъ, что кривая уже въ первоначальной системѣ имѣла видъ (67); такимъ образомъ, при дальнѣйшемъ изслѣдованіи будемъ опускать верхніе указатели при x и y:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ ------ } (68).$$

Рѣшимъ это уравненіе относительно x и y:

$$y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \text{ ------ } (69).$$

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$x = \pm\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}} \text{ - - - - - - - } (70).$$

Если $x^2 > a^2$, то $\frac{x^2}{a^2} > 1$; тогда подкоренное количество въ ур-іи (69) отрицательно и для y получается мнимое значеніе. Чтобы y имѣло дѣйствительное значеніе, необходимо условіе:

$$x^2 \leq a^2;$$

т. е. ни одна точка эллипса не можетъ имѣть абсциссу больше $+a$ и меньше $-a$, иначе говоря, вся кривая заключается между двумя линіями, параллельными оси y-овъ, и отстоящими отъ нея на разстояніи a.

Изъ ур-ія (70) видимъ также, что кривая заключена между двумя линіями, параллельными оси x-овъ и отстоящими отъ нея на разстояніи b; такъ что вся кривая заключена внутри полученнаго прямоугольника $KLMN$.

Фиг. 36.

Если $x=a$, то $y=0$; значитъ кривая проходитъ черезъ точку A. Такимъ же образомъ находимъ, что кривая проходитъ черезъ точки A', B и B'. Точки A, A', B и B' называются <u>вершинами</u> эллипса. Каждому значенію x соотвѣтствуютъ два

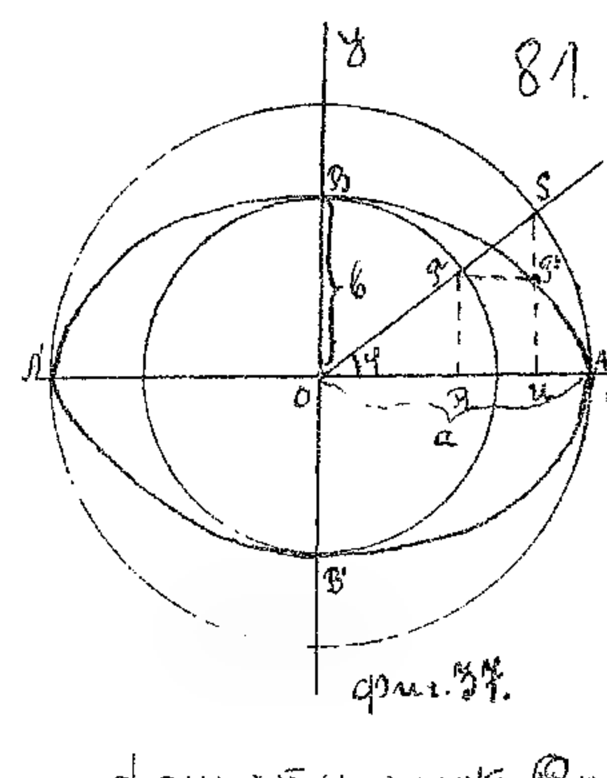
значенія y, равныхъ по абсолютной величинѣ и различныхъ по знаку. Значитъ кривая симметрична относительно оси $x^{\text{овъ}}$. Такъ же находимъ, что кривая симметрична относительно оси $y^{\text{овъ}}$. Прямыя AA' и BB' называются главными осями эллипса. Такимъ образомъ каждой точкѣ P, соотвѣтствуютъ еще три точки P_2, P_3 и P_4, симметричныя относительно главныхъ осей. Воспользуемся для построенія точекъ эллипса способомъ изображенія его посредствомъ такъ называемаго перемѣннаго параметра. Положимъ, что

$$\left.\begin{aligned} x &= a\,\mathrm{Cos}\,\varphi. \\ y &= b\,\mathrm{Sin}\,\varphi \end{aligned}\right\} \text{------ (71).}$$

Подставимъ эти выраженія въ лѣвую часть ур-ія (68):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2\mathrm{Cos}^2\varphi}{a^2}+\frac{b^2\,\mathrm{Sin}^2\varphi}{b^2}=\mathrm{Cos}^2\varphi+\mathrm{Sin}^2\varphi=1,$$

т. е. точки, соотвѣтствующія различнымъ значеніямъ φ въ формулахъ (71), лежатъ на эллипсѣ. Опишемъ теперь около начала координатной системы окружности радіусовъ a и b. Черезъ начало проведемъ произвольную прямую, и уголъ наклоненія ея къ оси $x^{\text{овъ}}$ назовемъ черезъ φ. Точки пересѣченія прямой съ окружностью назовемъ T и S. Изъ S опу =



фиг. 37.

скаемъ перпендикуляръ SU на ось $X^{ов}$, а изъ P перпендикуляръ на SU. Полученная точка пересѣченія P принадлежитъ эллипсу. Въ самомъ дѣлѣ называя координаты точки P черезъ X и Y, находимъ изъ чертежа:

$$X = OU = OS \operatorname{Cos}\varphi = a \operatorname{Cos}\varphi.$$

$$Y = UP = RP = OP \operatorname{Sin}\varphi = b \operatorname{Sin}\varphi.$$

Избирая новыя прямыя OS', OS'' и т. д., получаемъ сколько угодно точекъ эллипса.

Найдемъ теперь ур-іе касательной къ эллипсу. Сровнивая общее ур-іе (62) кривой съ ур-іемъ (68) эллипса, находимъ:

$$A = \frac{1}{a^2};\ B = \frac{1}{b^2};\ D = 0;\ E = 0;\ F = -1.$$

Подставляя эти значенія въ общее ур-іе касательной (49) получаемъ касательную къ эллипсу въ точкѣ $(x_1\, y_1)$.

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1 \text{ - - - - - - - } (72).$$

Помощью этого ур-ія легко доказать, что касательныя въ вершинахъ эллипса перпендикулярны къ осямъ. Возьмемъ, напр., вершину A. Ея координаты суть $x_1 = a$, $y_1 = 0$. Подставляя въ ур-іе (72), получаемъ:

$$\frac{x}{a}=1,$$

отсюда $x=a$.

Мы получили ур-іе прямой, параллельной оси $Y^{овъ}$ т.е. перпендикулярной къ оси $X^{овъ}$.

IV. Разсмотримъ теперь случай, когда въ ур-іи $Ax^2+By^2+2Dx+2Ey+F=0$ коэффиціенты A и B имѣютъ различные знаки, что выражается условіемъ: $AB<0$, и пусть δ имѣетъ тотъ-же знакъ, что B. Тогда въ ур-іи (66) знаменатель перваго члена положителенъ, а второго отрицателенъ. На этомъ основаніи мы можемъ ввести слѣдующія обозначенія

$$a^2=\frac{\delta}{A^2B};\quad b^2=\frac{-\delta}{AB^2}.$$

Тогда ур-іе кривой принимаетъ видъ:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{-----} (73).$$

Кривая, выражаемая этимъ ур-іемъ, называется <u>гиперболою</u>.

Итакъ, кривая, изображаемая ур-іемъ

$$Ax^2+By^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

есть гипербола, когда A и B имѣютъ различные знаки а $\delta=BD^2+AE^2-ABF$ отлично отъ нуля. Въ новой системѣ, оси которой параллельны даннымъ и нач. по которой совпадаетъ съ центромъ, коорди-

натъ котораго суть:

$$l = -\frac{D}{A};\ m = -\frac{E}{B},$$

ур-іе гиперболы принимаетъ видъ

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

причемъ $a^2 = \frac{\delta}{A\cdot B}$, $b^2 = -\frac{\delta}{AB^2}$.

Чтобы представить себѣ форму гиперболы, изслѣдуемъ ея ур іе, причемъ опять опустимъ указатели:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ ------- } (74)$$

Рѣшимъ это ур-іе относительно x и y.

$$x = \pm a\sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}} \text{ ------- } (75)$$

$$y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \text{ ------- } (76).$$

Кривая симметрична относительно оси $Y^{\text{овъ}}$, ибо каждому значенію y соотвѣтствуютъ два значенія для x, равныхъ по величинѣ, но различныхъ по знаку. Такъ-же находимъ, что кривая симметрична относительно оси $X^{\text{овъ}}$. Такъ какъ подкоренное количество въ ур-іи (75) всегда положительно, то всевозможнымъ значеніямъ y соотвѣтствуетъ всегда дѣйствительныя значенія для x. Но y будетъ имѣть дѣйствительное значеніе только тогда

когда $\frac{x^2}{a^2} \geq 1$.

или $x^2 \geq a^2$.

Значитъ всѣ точки кривой лежатъ внѣ пространства, образуемаго двумя линіями, проведенными параллельно оси y-овъ на разстояніи a и $-a$ отъ нея.

Если $x=a$, то $y=0$, при $x=-a$, y опять равно нулю. Значитъ кривая пересѣкаетъ ось X-овъ въ двухъ точкахъ A и A', отстоящихъ по обѣ стороны отъ начала на разстояніи a. Точка A и A' называются **вершинами**, а координатныя оси **главными осями** гиперболы, именно: ось X-овъ **дѣйствительною**, а ось Y-овъ **мнимою**. Длина главныхъ осей соотвѣтственно равна $2a$ и $2b$.

Фиг. 38.

Чтобы построить любое число точекъ нашей кривой, воспользуемся опять способомъ ея изображенія помощью перемѣннаго параметра

Положимъ, что $x=\frac{a}{\cos\varphi}$, $y=b\,tg\,\varphi$ ----- (77).

Подставляя эти значенія въ уравненіе (74) гиперболы получимъ:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{\cos^2\varphi}-tg^2\varphi=\frac{1}{\cos^2\varphi}-\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}=\frac{1-\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}=\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}=1.$$

т.е. дѣйствительно точки (x, y) при условіи (77) принадлежатъ гиперболѣ. Опишемъ теперь изъ начала окружность радіуса a. На разстояніи b проводимъ линію, параллельную оси $y^{овъ}$. Черезъ начало проводимъ прямую, наклоненную къ оси $X^{овъ}$ подъ угломъ φ. Пусть она пересѣкаетъ параллель къ оси $y^{овъ}$ въ точкѣ R, а окружность въ точкѣ S. Изъ S возставляемъ перпендикуляръ къ OS, который пересѣкаетъ ось $X^{овъ}$ въ точкѣ Q. Теперь черезъ Q проведемъ прямую, параллельную къ оси $y^{овъ}$, а черезъ R прямую, параллельную оси $X^{овъ}$ и пересѣченіе этихъ прямыхъ назовемъ черезъ P. Точка P принадлежитъ гиперболѣ, ибо ея координаты суть:

Фиг. 39.

$$\left.\begin{aligned} x&=OQ=\frac{OS}{\cos\varphi}=\frac{a}{\cos\varphi}\\ y&=QP=AR=OA\,tg\varphi=b\,tg\varphi \end{aligned}\right\}\cdots(78).$$

Проводя новыя прямыя OS', OS'' и т. д. получаемъ сколько угодно точекъ гиперболы.

Проведемъ черезъ начало координатъ прямую, наклоненную къ оси $X^{\text{овъ}}$ подъ угломъ γ, который опредѣляется требованіемъ:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{b}{a}.$$

Опредѣлимъ точку пересѣченія данной прямой съ гиперболою.

Изъ произвольной точки Q оси $X^{\text{овъ}}$ возставляемъ перпендикуляръ, пересѣкающій прямую въ точкѣ R, а гиперболу въ точкѣ P. Чтобы отыскать точку пересѣченія прямой съ гиперболою, опредѣлимъ ту точку гиперболы, для которой $PR = 0$.

Фиг. 40.

Изъ чертежа находимъ:

$$PR = QR - QP \text{ - - - - } (79).$$

Возьмемъ ур-іе прямой: $y = x\operatorname{tg}\gamma + y_0$.

Для прямой OR начальная ордината y_0 равна нулю, ибо прямая проходитъ черезъ начало, а $\operatorname{tg}\gamma$ по условію равенъ $\frac{b}{a}$.

Подставляя эти значенія въ ур-іе прямой, получаемъ ур-іе прямой OR:

$$y = \frac{b}{a}x.$$

Т. к. R лежитъ на OR, то координаты этой точки должны удовлетворять ур-iю прямой OR, отсюда, если $OQ = x$:

$$QR = \frac{bx}{a}$$

На томъ-же основанiи, ордината QP точки P должна удовлетворять ур-iямъ (77).

$$QP = b\,tg\,\beta = \frac{b\sin\beta}{\cos\alpha}.$$

Но изъ ур-iй (77) имѣемъ, что $\cos\beta = \frac{a}{x}$, поэтому

$$QP = \frac{bx}{a}\cdot\sin\beta.$$

Подставляя полученныя значенiя для QR и QP въ ур-iе (79), получаемъ:

$$PR = \frac{bx}{a} - \frac{bx}{a}\sin\beta = \frac{bx}{a}(1 - \sin\beta)$$

Чтобы PR равнялось нулю, необходимо, чтобы изъ множителей равнялся нулю. Но x не можетъ равняться нулю, ибо въ гиперболѣ нѣтъ точки, абсцисса которой равна нулю; слѣдовательно:

$$1 - \sin\beta = 0; \quad \sin\beta = 1$$

Отсюда $\alpha = 90^\circ$ или 270°, а $tg\,\beta = \pm\infty$.

Подставляя это значенiе тангенса β въ ур-iе (77), находимъ:

$$y = \pm\infty,$$

значитъ PR равно нулю, если $y = \infty$, т. е. прямая OR пересѣкаетъ гиперболу въ нѣкоторой точкѣ, которой ордината равна безконечности или, какъ гово-

рать въ безконечно удаленной точкѣ. Прямая OR называется асимптотою гиперболы. Изъ симметричности гиперболы заключаемъ, что имѣется еще вторая асимптота, ур-іе которой есть:

$$y = -\frac{b}{a}x \ldots \ldots \quad (80)$$

Остается опредѣлить ур-іе касательной къ гиперболѣ. Возьмемъ опять общее ур-іе касательной: $x(Ax_1+D)+y(By_1+E)+Dx_1+Ey_1+F=0$. Сравнивая ур-іе гиперболы съ общимъ ур-іемъ (69) кривой вт-рого порядка, находимъ:

$$A=\frac{1}{a^2};\ B=-\frac{1}{b^2};\ D=0;\ E=0;\ F=-1.$$

Подставляя эти значенія въ общее ур-іе касательной, получаемъ уравненіе касательной къ гиперболѣ (74) въ точкѣ (x_1, y_1):

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1 \ldots \ldots (81).$$

Когда въ общемъ ур-іи (69) A и B различнаго знака, а C имѣетъ тотъ-же знакъ, что A, то ур-іе очевидно изображаетъ гиперболу, дѣйствительная ось которой параллельна оси Yовъ.

Разсмотрѣнныя нами кривыя, эллипсъ, гипербола и парабола получаются ... и

сѣченіи конуса плоскостью и потому называются коническими сѣченіями. Доказательствомъ этой теоремы мы займемся въ аналитической геометріи въ пространствѣ.

V. Намъ остается еще разсмотрѣть тотъ случай, когда A и B имѣютъ различные знаки, а $\delta = 0$

$$AB < 0; \quad \delta = 0.$$

Въ этомъ случаѣ ур-іе (65) принимаетъ видъ

$$Ax'^2 + By'^2 = 0,$$

откуда $\quad y'^2 + \frac{A}{B}x'^2 = 0.$

$$y'^2 - \left(-\frac{A}{B}\right)x'^2 = 0.$$

Лѣвую часть ур-ія можно разложить на два множителя:

$$\left(y' - \sqrt{-\frac{A}{B}}\,x'\right)\left(y' + \sqrt{-\frac{A}{B}}\,x'\right) = 0$$

Чтобы произведеніе равнялось нулю, необходимо, чтобы одинъ изъ множителей равнялся нулю:

$$\left.\begin{array}{l} y' - \sqrt{-\frac{A}{B}}\,x' = 0. \\ \text{или} \quad y' + \sqrt{-\frac{A}{B}}\,x' = 0 \end{array}\right\} \text{- - - - (89).}$$

Т. к. A и B имѣютъ различные знаки, то подкоренныя величины всегда положительны, значитъ полученныя выраженія всегда дѣйствительны. Ур-іе (89) суть первой степени, т. е. изображаютъ.

прямыя линіи. Отсюда заключаемъ, что въ данномъ случаѣ кривая распадается на двѣ прямыя. Замѣчая далѣе, что ур-ія (82) однородны, находимъ, что онѣ проходятъ черезъ начало координатъ системы (X',Y'). Сопоставляя ур-ія (82) съ ур-іемъ прямой линіи

$$y = x\,tg\,\gamma + y_0$$

видимъ, что (82) суть ур-ія прямыхъ, составляющихъ съ осью $X^{\text{овъ}}$ уголъ

$$tg\,\gamma = \pm\sqrt{-\frac{A}{B}}.$$

Итакъ, линія, изображаемая ур-іемъ

$$Ax^2 + By^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

въ случаѣ, когда A и B имѣютъ различные знаки и $\delta = 0$, распадается на двѣ прямыя, проходящія черезъ точку $\left(-\frac{D}{A}, -\frac{E}{B}\right)$ и составляющія съ осью $X^{\text{овъ}}$ углы γ, опредѣленные ур-іемъ

$$tg\,\gamma = \pm\sqrt{-\frac{A}{B}}.$$

Изслѣдованіе уравненія

$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$

Уравненіе

$$Ax^2 + By^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \text{ - - - - } (83).$$

еще не есть самое общее уравненіе кри —

вой второго порядка.

Общимъ ур-іемъ второго порядка служитъ:

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0 \quad \ldots (84).$$

Изслѣдуемъ, изображаются ли этимъ ур-іемъ уже извѣстныя намъ кривыя, или же оно выражаетъ какую-нибудь новую линію. Намъ станетъ ясно, что кривыя (83) и (84) суть тѣ же самыя, коль скоро намъ удастся доказать, что соотвѣтственно избирая новую координатную систему, мы всегда можемъ въ ур-іи (84) уничтожить членъ, содержащій произведеніе xy.

Для доказательства повернемъ координатную систему на нѣкоторый уголъ α. Тогда имѣемъ по формуламъ (6а)

$$x = x'\operatorname{Cos}\alpha - y'\operatorname{Sin}\alpha.$$

$$y = x'\operatorname{Sin}\alpha + y'\operatorname{Cos}\alpha.$$

Подставляемъ эти значенія x и y въ ур-іе (84):

$$A(x'^2\operatorname{Cos}^2\alpha+y'^2\operatorname{Sin}^2\alpha-2x'y'\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Cos}\alpha)+$$
$$+B(x'^2\operatorname{Sin}^2\alpha+y'^2\operatorname{Cos}^2\alpha+2x'y'\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Cos}\alpha)+$$
$$+2C[(x'^2-y'^2)\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Cos}\alpha+x'y'(\operatorname{Cos}^2\alpha-\operatorname{Sin}^2\alpha)]+$$
$$+2D(x'\operatorname{Cos}\alpha-y'\operatorname{Sin}\alpha)+2E(x'\operatorname{Sin}\alpha+y'\operatorname{Cos}\alpha)+F=0.$$

Если теперь введемъ обозначенія:

$$\left.\begin{aligned} A' &= A\operatorname{Cos}^2\alpha+B\operatorname{Sin}^2\alpha+C\operatorname{Sin}2\alpha \\ B' &= A\operatorname{Sin}^2\alpha+B\operatorname{Cos}^2\alpha-C\operatorname{Sin}2\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots (85)$$

$$C' = \frac{-A+B}{2}\sin 2\alpha + C\cos 2\alpha.$$

$$D' = D\cos\alpha + E\sin\alpha$$

$$E' = -D\sin\alpha + E\cos\alpha$$

$$F' = F,$$

то полученное ур-іе можно представить въ видѣ

$$A'x'^2 + B'y'^2 + 2C'x'y' + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0.$$

Теперь надо опредѣлить α такимъ условіемъ, чтобы членъ $C'x'y'$ сдѣлался равнымъ нулю. Для этого достаточно, чтобы C' равнялось нулю или

$$(-A+B)\sin 2\alpha + 2C\cdot\cos 2\alpha = 0.$$

Откуда $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2C}{A-B}$ - - - - - - (86).

Т. к. tg можетъ принимать всевозможныя значенія отъ $+\infty$ до $-\infty$, то α всегда будетъ имѣть дѣйствительное значеніе, т. е. всегда можно найти такой уголъ, поворачивая на который координатную систему, мы можемъ уничтожить членъ Cxy, т. е. ур-іе (84) привести къ виду (83); слѣдовательно, ур-іе (84) всегда изображаетъ какую-нибудь изъ извѣстныхъ намъ линій.

Опредѣлимъ при помощи уравненія (86), $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$.

$$\cos^2 2\alpha = \frac{1}{1+tg^2 2\alpha} = \frac{1}{1+\frac{4C^2}{(A-B)^2}} = \frac{(A-B)^2}{(A-B)^2+4C^2}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \frac{A-B}{\sqrt{(A-B)^2+4C^2}} \\ \sin 2\alpha &= \frac{2C}{\sqrt{(A-B)^2+4C^2}} \end{aligned}\right\} \quad \text{- - - - (87)}$$

Складывая ур-ія (85) получаемъ

$$A'+B'=A+B \ldots\ldots\ldots (88).$$

ибо $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$,

т. е. при вращеніи, сумма коэффиціентовъ при x^2 и y^2 не измѣняется. Если теперь вычтемъ второе изъ этихъ ур-ій изъ перваго, то получимъ

$$A'-B'=A(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha) - B(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+$$
$$+2C\sin\alpha = A\cos 2\alpha - B\cos 2\alpha + 2C\sin 2\alpha =$$
$$=(A-B)\cos 2\alpha + 2C\sin 2\alpha.$$

Теперь подставляемъ значенія $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ изъ уравненій (87).

$$A'-B' = \frac{(A-B)^2}{\sqrt{(A-B)^2+4C^2}} + \frac{4C^2}{\sqrt{(A-B)^2+4C^2}} =$$

$$= \frac{(A-B)^2+4C^2}{\sqrt{(A-B)^2+4C^2}}$$

$$A'-B' = \sqrt{(A-B)^2+4C^2} \ldots\ldots (89)$$

Сложимъ между собою и вычтемъ ур-iя (88) и (89):

$$A' = \frac{1}{2}\left[A + B + \sqrt{(A-B)^2 + 4C^2}\right]$$

$$B' = \frac{1}{2}\left[A + B - \sqrt{(A-B)^2 + 4C^2}\right].$$

Перемножая полученныя выраженiя, находимъ:

$$A'B' = \frac{1}{4}\left\{(A+B)^2 - \left[(A-B)^2 + 4C^2\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}(A^2 + 2AB + B^2 - A^2 + 2AB - B^2 - 4C^2) = \frac{1}{4}(4AB - 4C^2) =$$

$$= AB - C^2; \quad A'B' = AB - C^2 \quad \ldots (90)$$

Мы раньше нашли, что уравненiе (83) изображаетъ эллипсъ, параболу или гиперболу, въ зависимости отъ того, будетъ ли AB больше нуля, равно нулю или меньше нуля. Отсюда, принимая во вниманiе ур-iе (90), можемъ сказать, что общее ур-iе вида (84) изображаетъ:

эллипсъ, если $AB - C^2 > 0$.

параболу, " $AB - C^2 = 0$.

гиперболу, " $AB - C^2 < 0$.

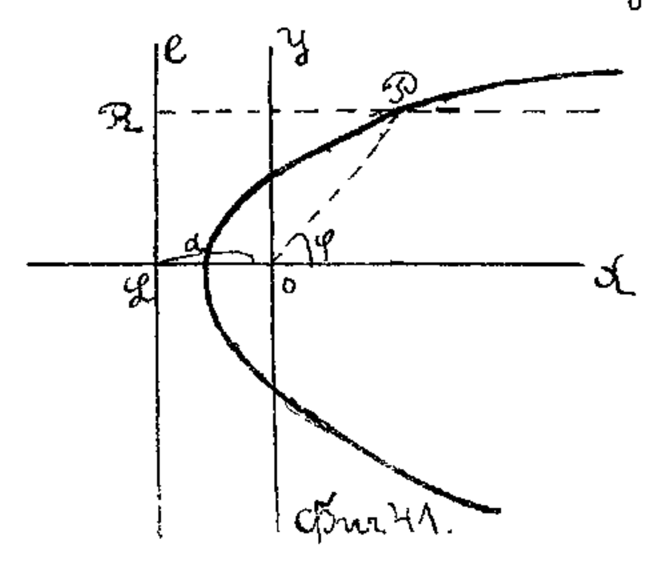
Для изслѣдованiя вопроса, дѣйствительно ли получается эллипсъ или гипербола, или же соотвѣтственная кривая мнимая, т.е. не существуетъ, или, наконецъ, получаемая гипербола распадается на двѣ прямыя…,

слѣдуетъ еще опредѣлить знакъ величины соотвѣтствующей величинѣ δ при ур-іи (83).
Не трудно опредѣлить эту величину Δ, называемую **дискриминантомъ** коническаго сѣченія. Она получается въ видѣ.

$$\Delta = AE^2 + BD^2 - 2CDE - F(AB - C^2).$$

Фокусы коническихъ сѣченій
Равносторонняя гипербола

__Задача.__ Опредѣлить геометрическое мѣсто точекъ равноотстоящихъ отъ данной точки и данной прямой.
Пусть даны точка O и прямая l. Примемъ точку O за начало координатъ, а ось Y-овъ возьмемъ параллельно прямой l. Пусть разстояніе OL = d. Наконецъ, P пусть будетъ одна изъ точекъ искомаго геометрическаго мѣста. Опускаемъ перпендикуляръ PR на данную прямую и соединимъ P съ O.



Фиг. 41.

Какъ дано, значитъ, найти геометрическое мѣсто точекъ, для которыхъ

$$OP = RP \text{------} (91).$$

Если координаты точки P суть (x, y), то мы имѣемъ: $OP = \sqrt{x^2+y^2}$.

$$RP = x + d.$$

Сопоставляя эти формулы съ условіемъ (91), получаемъ:

$$\sqrt{x^2+y^2} = x + d.$$

Это и есть ур-іе искомаго геометрическаго мѣста. Возвысивъ обѣ части въ квадратъ, получимъ:

$$x^2+y^2 = x^2+2dx+d^2.$$

$$y^2 = 2dx + d^2 \text{----} (92).$$

Это ур-іе принадлежитъ къ тѣмъ, общій видъ которыхъ есть

$$Ax^2+By^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

Чтобы привести ур-іе (92) къ общему виду, переносимъ всѣ члены налѣво:

$$y^2 - 2dx - d^2 = 0.$$

Сравнивая это уравненіе съ общимъ, находимъ:

$$\left.\begin{array}{l} A=0;\ B=1;\ D=-d; \\ E=0;\ F=-d^2 \end{array}\right\} \text{----} (93).$$

Намъ же извѣстно, что ур-іе (83), въ случаѣ, если $A=0$ или $B=0$ изображаетъ параболу. Итакъ искомое геометрическое мѣсто точекъ равно отстоящихъ отъ данной точки и данной прямой, есть парабола. Найдемъ координаты ея вершины, которыя при общемъ ур-іи выражаются (стр 71)

$$a=\frac{E^2-BF}{2BD}; \quad b=-\frac{E}{B}.$$

Для этого подставляемъ въ эти выраженія значенія (93):

$$a=-\frac{d}{2}; \quad b=0,$$

т. е. вершина параболы лежитъ на оси $X^{\text{овъ}}$, по лѣвую сторону отъ начала, на разстояніи $\frac{d}{2}$ отъ него, или по серединѣ разстоянія отъ начала до прямой l.

Такимъ же образомъ находимъ параметръ параболы:

$$p=-\frac{B}{D}=d \text{------} (94).$$

Значитъ разстояніе отъ начала O до прямой l равняется параметру параболы.

Найдемъ теперь ур-іе касательной къ параболѣ въ точкѣ $P_1(x_1 y_1)$

Уравненіе касательной къ кривой (83) есть (стр 67)

$$x(Ax_1+D)+y(By_1+E)+Dx_1+Ey_1+F=0.$$

Подставляя сюда значенія (93), получаемъ ур-іе касательной къ параболѣ (94):

$$-dx + yy_1 - dx_1 - d^2 = 0.$$

или $$yy_1 = dx + dx_1 + d^2.$$

Мы знаемъ, что если рѣшить ур-ie прямой относительно y, то коэффиціентъ при x изображаетъ тангенсъ угла, составляемаго прямой съ осью $X^{овъ}$ (стр. 47) Поэтому, чтобы найти уголъ γ, составляемый нашею касательною съ осью $X^{овъ}$, рѣшимъ ур-iе этой касательной относительно y.

$$y = \frac{d}{y_1} \cdot x + \frac{dx_1 + d^2}{y_1}$$

Значитъ $$tg\,\gamma = \frac{d}{y_1} \text{ - - - - - } (95).$$

Опредѣлимъ теперь уголъ φ. Изъ чертежа видно, что $tg\,\varphi = \frac{y_1}{x_1}$. Наконецъ, чтобы опредѣлить уголъ $\vartheta = P_1 P_1 O$ замѣчаемъ, что $\angle\varphi$ есть внѣшній уголъ тр-ка OP_1T_1, слѣдоват.,

$$\varphi = \gamma + \vartheta,$$

$$\vartheta = \varphi - \gamma$$

Фиг. 49.

Откуда:

$$tg\,\vartheta = tg(\varphi-\gamma) = \frac{tg\varphi - tg\gamma}{1 + tg\varphi \cdot tg\gamma} = \frac{\frac{y_1}{x_1} - \frac{d}{y_1}}{1 + \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{d}{y_1}} = \frac{y_1^2 - x_1 d}{y_1(x_1 + d)}.$$

Вмѣсто y_1^2 можно написать $2dx_1+d^2$, т. к. P_1 лежитъ на кривой и, слѣдовательно, координаты P_1 должны удовлетворять ур-ію (92). Откуда

$$tg\,\delta=\frac{2dx_1+d^2-x_1d}{y_1(x_1+d)}=\frac{dx_1+d^2}{y_1(x_1+d)}=\frac{d}{y_1}.$$

Сравнивая полученное значеніе съ ур-іемъ (95), находимъ, что

$$tg\,\gamma=tg\,\delta.$$

$$\angle\gamma=\angle\delta.$$

Слѣдовательно, если продолжить линію P_1R_1 по правую сторону, то уголъ составляемый ею съ касательной, будучи равенъ, какъ соотвѣтственный углу γ, равенъ также и углу T_1P_1O.

Извѣстно, что свѣтовый лучъ отражается прямою линіею такъ, что уголъ паденія равенъ углу отраженія. Въ случаѣ кривой, отраженіе свѣта слѣдуетъ тому же закону, причемъ угломъ паденія или отраженія наз. уголъ, составленный падающимъ или отраженнымъ лучемъ съ касательной къ кривой въ той точкѣ, на которую лучъ падаетъ.

Основываясь на равенствѣ угловъ δ и γ, мы можемъ сказать, что всѣ лучи параллельные главной оси параболы, отражаясь отъ параболы, проходятъ черезъ точку O, поэтому точка O наз. фокусомъ параболы. Обратно, если въ O помѣстить свѣтящую точку, то лучи

ея, послѣ отраженія, станутъ параллельны оси параболы.

Если въ ур-іи (97) x приравнять нулю, то соотвѣтственное значеніе y дастъ намъ величину OA: $OA = \alpha$.

Сравнивая этотъ результатъ съ ур-іемъ (94) мы замѣчаемъ, что параметръ параболы есть половина хорды, проходящей черезъ фокусъ перпендикулярно къ главной оси.

Задача Опредѣлить геометрическое мѣсто точекъ, сумма разстояній которыхъ отъ двухъ данныхъ точекъ постоянна, и геометрическое мѣсто точекъ, для которыхъ разность разстояній отъ двухъ данныхъ точекъ постоянна. Пусть данныя точки суть F_1 и F_2. Проведемъ черезъ эти точки прямую, которую примемъ за ось X-овъ, а середину разстоянія F_1F_2 примемъ за начало координатъ.

Фиг. 43.

Такъ что $OF_1 = F_2O = c$.

Пусть точка P принадлежитъ искомому геометрическому мѣсту. Если соединимъ точку P съ F_1 и съ F_2, то для перваго геометрическаго мѣста имѣемъ условіе $PF_1 + PF_2 = 2a$.

а для второго: $PF_1 - PF_2 = 2a$, гдѣ $2a$ постоянная величина.

Вспомнивъ формулу разстоянія между двумя точками (стр. 23), мы можемъ написать:

$$\left.\begin{aligned} PF_1 &= \sqrt{(x-c)^2+y^2} \\ PF_2 &= \sqrt{(x+c)^2+y^2} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (96),$$

гдѣ x и y координаты точки P

Соединяемъ условія обоихъ геометрическихъ мѣстъ въ одно

$$PF_1 \pm PF_2 = 2a.$$

и подставляемъ сюда значенія (96).

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a.$$

Возводимъ обѣ части ур-ія въ квадратъ:

$$x^2-2cx+c^2+y^2+x^2+2cx+c^2+y^2 \pm 2\sqrt{(x^2+y^2+c^2-2cx)(x^2+y^2+c^2+2cx)} = 4a^2$$

По сокращеніи обѣ части дѣлимъ на 2:

$$x^2+y^2+c^2 \pm \sqrt{(x^2+y^2+c^2-2cx)(x^2+y^2+c^2+2cx)} = 2a^2.$$

или $\pm\sqrt{(x^2+y^2+c^2-2cx)(x^2+y^2+c^2+2cx)} = 2a^2-(x^2+y^2+c^2)$.

Раскрывъ скобки подъ корнемъ, возводимъ опять ур-іе въ квадратъ:

$$(x^2+y^2+c^2)^2 - 4c^2x^2 = 4a^4 - 4a^2(x^2+y^2+c^2) + (x^2+y^2+c^2)^2.$$

Сократимъ на 4 и раскрывъ скобки, получимъ:

$$-c^2x^2 = a^4 - a^2x^2 - a^2y^2 - a^2c^2$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2;$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \;\ldots\ldots (97).$$

Мы получили ур-іе искомаго геометрическаго мѣста, которое повидимому есть кривая второго порядка. Когда $a^2-c^2>0$, то полученная кривая есть эллипсъ, въ противномъ случаѣ мы получаемъ гиперболу.

I. Разсмотримъ то геометрическое мѣсто, условіемъ котораго является:

$$PF_1+PF_2=2a.$$

Т. к. сумма двухъ сторонъ тр-ка больше третьей стороны, то

$$PF_1+PF_2>F_1F_2.$$

или $2a>2c$.

$$a>c;\quad a^2-c^2>0.$$

Видя, что въ этомъ случаѣ a^2-c^2 положительно, можемъ обозначить:

$$a^2-c^2=b^2 \;\ldots\ldots (98).$$

Тогда ур-іе (97) принимаетъ видъ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

т. е. мы получаемъ ур-іе эллипса. Итакъ эллипсъ обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что сумма разстояній каждой его точки отъ двухъ постоянныхъ точекъ есть величина постоянная.

II. Теперь обратимъ вниманіе на ту кри

вую, для которой

$$PF_1 - PF_2 = 2a.$$

Разность двухъ сторонъ тр-ка всегда меньше третьей стороны; поэтому:

$$PF_1 - PF_2 < F_1F_2.$$

или $2a < 2c.$

$$a < c; \quad a^2 - c^2 < 0.$$

Значитъ въ этомъ случаѣ a^2-c^2 есть величина отрицательная, и мы можемъ обозначить:

$$a^2 - c^2 = -b^2 \text{ ------ } (99).$$

Тогда изъ ур-iя (97) получаемъ ур-iе гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

<u>Итакъ гипербола обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что разность разстоянiй каждой ея точки отъ двухъ опредѣленныхъ точекъ есть величина постоянная.</u>

Пусть намъ даны большая и малая ось эллипса. Зная a и b, мы можемъ найти c изъ формулы (98), т.е. можемъ построить точки F_1 и F_2, ибо c есть разстоянiе каждой изъ нихъ отъ начала.

Фиг. 44.

Для построенiя этихъ точекъ стоитъ только изъ конца B малой оси отм =

сать окружность радiусомъ a. Точка пересѣченiя ея съ большою осью суть точки F_1 и F_2, ибо изъ чертежа видно, что тогда $a^2-c^2=b^2$. Относительно гиперболы смыслъ построенiя точекъ F_1 и F_2, остается тотъ-же.

Фиг. 45.

Зная полуоси a и b, находимъ c какъ гипотенузу тр-ка съ катетами a и b, ибо $c^2-a^2=b^2$. Откладывая c вправо и влѣво отъ начала по оси $X^{овъ}$, получаемъ точки F_1 и F_2. Докажемъ теперь, что точки F_1 и F_2, какъ въ эллипсѣ, такъ и въ гиперболѣ обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что свѣтовые лучи, выходящiе изъ одной изъ этихъ точекъ F_1, отражаясь отъ эллипса или гиперболы, собираются въ другой точкѣ F_2 и обратно. На этомъ основанiи точки F_1 и F_2 называютъ ея фокусами эллипса и гиперболы.

Въ случаѣ эллипса (фиг. 46) касательная какой-нибудь точки $P_1(x_1y_1)$ проходитъ внѣ точекъ F_1 и F_2. Въ случаѣ же гиперболы (ф. 47) между

фиг 46.

нiями.

Чтобы убѣдиться въ справедливости нашей теоремы, стоитъ только доказать, что $\angle F_2 P_1 F = \angle R P_1 F_1$.

Фиг. 47.

Ур-iе касательной къ кривой $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$, по стр. 81, будетъ $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{a^2-c^2}=1$.

Если рѣшимъ это ур-iе относительно y, то (стр. 47) коэффицiентъ при x дастъ намъ выраженiе для $tg\,\gamma$.

$$y=-\frac{a^2-c^2}{a^2}\cdot\frac{x_1}{y_1}x+\frac{a^2-c^2}{y_1}$$

Отсюда

$$tg\,\gamma=-\frac{a^2-c^2}{a^2}\cdot\frac{x_1}{y_1} \text{------} (100).$$

Такимъ-же образомъ, для опредѣленiя угла ϑ_1, опредѣляемъ предварительно ур-iе прямой P_1F_1. Такъ какъ эта прямая проходитъ черезъ точки, координаты которыхъ суть $(x_1\ y_1)$ и $(c,0)$, то ур-iе ея по стр. 39 есть

$$\begin{vmatrix}1 & x & y\\ 1 & x_1 & y_1\\ 1 & c & 0\end{vmatrix}=0$$

или $-cy_1+y_1x+(c-x_1)y=0$.

Рѣшаемъ ур-iе относительно y:

$$y=\frac{y_1}{x-c}x-\frac{cy_1}{x_1-c}.$$

Слѣдов. $\operatorname{tg}\vartheta_1 = \frac{y_1}{x_1 - c}$ - - - - (101).

Наконецъ $\operatorname{tg}\vartheta_2$ получимъ, замѣняя въ выраженіи (101) $+c$ черезъ $-c$. (ибо F_2 имѣетъ координаты $(-c, 0)$ и слѣдовательно, ур-іе P_1F_2 мы получимъ изъ ур-ія P_1F_1, замѣняя $+c$ на $-c$).

Итакъ $\operatorname{tg}\vartheta_2 = \frac{y_1}{x_1 + c}$

Найдемъ теперь, чему равняются углы $(\vartheta_1 - \gamma)$ и $(\vartheta_2 - \gamma)$

$$\operatorname{tg}(\vartheta_1 - \gamma) = \frac{\operatorname{tg}\vartheta_1 - \operatorname{tg}\gamma}{1 + \operatorname{tg}\vartheta_1 \operatorname{tg}\gamma} = \frac{\frac{y_1}{x_1 - c} + \frac{a^2 - c^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1}}{1 - \frac{y_1}{x_1 - c} \cdot \frac{a^2 - c^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1}} =$$

$$= \frac{a^2 y_1^2 + (a^2 - c^2)(x_1^2 - c x_1)}{y_1(a^2 x_1 - a^2 c - a^2 x_1 + c^2 x_1)} \text{ - - - (102).}$$

Т. к. y_1 есть ордината точки P_1, лежащей на данной кривой, то она удовлетворяетъ ур-ію (97)

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Преобразуемъ это ур-іе.

$$(a^2 - c^2)x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

$$a^2 y_1^2 = a^2(a^2 - c^2) - (a^2 - c^2)x_1^2.$$

$$a^2 y_1^2 = (a^2 - c^2)(a^2 - x_1^2).$$

Подставляя значенія $a^2 y_1^2$ въ формулу (102).

$$\operatorname{tg}(\vartheta_1 - \gamma) = \frac{(a^2 - c^2)(a^2 - x_1^2) + (a^2 - c^2)(x_1^2 - c x_1)}{y_1 c (c x_1 - a^2)} =$$

$$= \frac{(a^2 - c^2)(a^2 - x_1^2 + x_1^2 - c x_1)}{c y_1 (c x_1 - a^2)} =$$

$$= \frac{-(a^2 - c^2)}{c y_1}$$

Такъ какъ въ выраженіе $tg\gamma$ (100) входитъ только четная степень c, то мы получимъ $tg(\vartheta_2-\gamma)$, замѣнивъ въ послѣднемъ выраженіи c на $-c$

$$tg(\vartheta_2-\gamma)=\frac{a^2-c^2}{cy_0}.$$

Слѣдовательно,

$$tg(\vartheta_1-\gamma)=-tg(\vartheta_2-\gamma).$$

Отсюда мы можемъ заключить, что или

$$\vartheta_2-\gamma=180^\circ-(\vartheta_1-\gamma) \text{------} (103).$$

или $\vartheta_1-\gamma=\gamma-\vartheta_2$ ---- (104).

Изъ чертежа видимъ, что $\angle\vartheta_1$ есть внѣшній уголъ тр-ка TP_1F_1, поэтому -

$$\vartheta_1-\gamma=\angle TP_1F_1 \text{-------} (105).$$

На томъ же основаніи, въ случаѣ эллипса

$$\vartheta_2-\gamma=\angle F_2P_1T \text{-----} (106),$$

а въ случаѣ гиперболы:

$$\gamma-\vartheta_2=\angle TP_1F_2 \text{-----} (107).$$

Кромѣ того, очевидно, что эллипсу соотвѣтствуетъ ур-іе (103), а гиперболѣ ур-іе (104). Вслѣдствіи этого для эллипса, по ур-іямъ (103), (105) и (106) получаемъ:

$$\angle F_2P_1T=180^\circ-TP_1F_1,$$

но такъ какъ и $\angle F_1P_1R=180^\circ-TP_1F_1$, то

$$\angle F_1P_1R=\angle F_2P_1T \text{-----} (108).$$

что и требовалось доказать.

Для гиперболы искомое ур-іе получаемъ непосредственно изъ ур-ія (104) подставляя вмѣсто $\vartheta_1 - \gamma$ и $\gamma - \vartheta_2$ ихъ значенія изъ ур-ій (105) и (107).

Мы видѣли, что разстояніе отъ фокуса до центра выражается въ эллипсѣ черезъ:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2},$$

а въ гиперболѣ черезъ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Отношеніе $\frac{c}{a}$ называется <u>эксцентрицитетомъ</u> кривой;

для эллипса $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

для гиперболы $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$

Если положимъ въ эллипсѣ эксцентрицитетъ равнымъ нулю: $\frac{c}{a} = 0$,

то получаемъ:

$$\sqrt{a^2 - b^2} = 0.$$

или $a = b$,

т.е. обѣ оси эллипса равны между собой. Въ этомъ случаѣ ур-іе эллипса принимаетъ видъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

или $x^2 + y^2 = a^2$,

т.е. переходитъ въ ур-іе окружности.

Слѣдовательно эллипсъ эксцентрицитетъ

котораго равенъ нулю есть кругъ.
Если положимъ въ гиперболѣ $a = b$, то ур-іе ея принимаетъ видъ:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

или $x^2 - y^2 = a^2$ ---- (109).

Такая гипербола, мнимая ось которой равна дѣйствительной, наз. <u>**равносторонней.**</u>

Уголъ, составляемый ассимптотою съ осью $X^{овъ}$ выражается (стр. 86).

$$tg\gamma = \pm \frac{b}{a}.$$

Въ случаѣ равносторонней гиперболы, получаемъ:

$$tg\gamma = \pm \frac{a}{a} = \pm 1,$$

отсюда $\quad \angle\gamma = \pm 45°.$

Чтобы въ данномъ случаѣ построить ассимптоты, стоитъ только раздѣлить уголъ между главными осями пополамъ. Здѣсь обѣ ассимптоты перпендикулярны между собой.

фиг. 46.

Интересно найти ур-іе равносторонней гиперболы, отнеся её къ системѣ $X'OY'$, образуемой ассимптотами. Для этого стоитъ только по=

вернуть старую систему на $-45°$, для чего пользуемся формулами (62).

$$\left.\begin{array}{l} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{array}\right\} \text{------} (110).$$

принимая $\alpha = -45°$.

Подставляемъ значенія:

$$\sin(-45°) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos(-45°) = 1/\sqrt{2}.$$

въ формулы вращенія (110):

$$x = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}} = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}};$$

$$y = \frac{-x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}} = \frac{y'-x'}{\sqrt{2}}.$$

Подставляя эти значенія въ ур-іе (109) гиперболы, получаемъ:

$$\frac{(x'+y')^2}{2} - \frac{(y'-x')^2}{2} = a^2.$$

$$x'^2 + 2x'y' + y'^2 - y'^2 + 2x'y' - x'^2 = 2a^2.$$

$$4x'y' = 2a^2.$$

$$x'y' = \frac{a^2}{2} \text{------} (111).$$

Такимъ образомъ мы получили уравненіе равносторонней гиперболы, отнесенной къ системѣ своихъ ассимптотъ

Аналитическая геометрия въ пространствѣ

Прямолинейныя координаты. Ур—я плоскостей и прямыхъ частнаго положенія.

Чтобы и въ пространствѣ сохранить основной смыслъ аналитической геометріи, т. е. чтобы и здѣсь сохранить возможность изображать геометрическія фигуры при помощи алгебраическихъ ур-ій, необходимо надлежащимъ образомъ обобщить координатную систему. Для этого тремя взаимно перпендикулярными плоскостями дѣлимъ пространство на восемь безконечно больших частей. Эти плоскости называются координатными плоскостями. Онѣ пересѣкаются по тремъ взаимно перпендикулярнымъ прямымъ, называемымъ координатными осями. Эти оси обозначаемъ буквами XX', YY' и ZZ'. Точка O пересѣченія трехъ плоскостей наз. началомъ координатной системы. Чтобы различать координатныя плоскости, ихъ называютъ: плоскость XY — горизонтальною, YZ — заднею вертикальною, а (ZX) — боковою вертикальною.

Пусть дана какая-нибудь въ пространствѣ то-ка P. Проведемъ черезъ нее пло=

скости, параллельныя плоскостямъ координатъ. Эти три плоскости отсѣкаютъ

Фиг. 49.

отъ осей отрѣзки OL, OM и ON, которые называются **координатами** точки P, что обозначается черезъ P(OL, OM, ON) или

P: $x = OL$; $y = OM$; $z = ON$.

Вмѣсто отрѣзковъ OL, OM и ON можно разсматривать, какъ координаты точки P, другія ребра параметра OP, соотвѣтственно равныя и параллельныя этимъ тремъ отрѣзкамъ, напр.: $x = OL$; $y = LQ$; $z = QP$.

x называется *абсциссою*, y – *ординатою*, z – *высотою* точки P.

Если установить масштабъ и измѣрить координаты, то каждой точкѣ будутъ соотвѣтствовать три числа. Пользуясь этимъ, можно изображать геометрическія фигуры ур-іями, какъ въ плоской аналитической геометріи, гдѣ каждой точкѣ соотвѣтствовали 2 числа. Обратная задача состоитъ въ томъ, что надо построить по даннымъ тремъ координатамъ точку, т.е. опредѣлить

ея положеніе въ пространствѣ. Изъ плоской аналитической геометріи мы знаемъ, что тутъ существуетъ неопредѣленность, состоящая въ томъ, что мы не знаемъ, въ какую сторону отъ начала требуется отложить данныя координаты. Для устраненія этой неопредѣленности мы опять пользуемся правиломъ знаковъ Декарта, причемъ надо разъ навсегда условиться, какія части осей будемъ принимать положительными, какія отрицательными. Такъ мы установимъ, что если положительная часть оси $X^{овъ}$ указываетъ на югъ, оси $Y^{овъ}$ на востокъ, тогда положительная часть оси $Z^{овъ}$ должна быть направлена вверхъ.

Z верхъ
0
Y. востокъ
X — югъ
Фиг. 50.

И въ аналитической геометріи въ пространствѣ обыкновенно обозначаютъ координатныя оси только одною буквою, которая ставится на положительной части ея. Теперь если намъ даны координаты P(5,3,4), то можно построить ее однозначно. Построеніе ясно изъ чертежа, на которомъ построена еще точка Q(3,2,-4). Знакъ координатъ въ каждомъ изъ 8 трехгранныхъ угловъ, на которые дѣлится безконечное пространство координатными плоскостями, вы-

Z
P
0
Y
X
Q
Фиг. 51.

ясняется чертежемъ (Ф. 57), на которомъ положительные отрѣзки выведены сплошными линiями, отрицательные же пунктиромъ; абсциссы точекъ обозначены черезъ OR, ординаты черезъ RQ, высоты черезъ QP съ соотвѣтственными указателями.

Фиг. 59.

Знаки координатъ въ различныхъ углахъ можно показать также слѣдующей таблицей:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

Т.к. точка O лежитъ одновременно во всѣхъ трехъ координатныхъ плоскостяхъ, то координаты ея суть: $x=0,\ y=0,\ z=0$ ---- (1).

Пусть будетъ дано ур-iе: $x=0$.

Всякая точка, лежащая на плоскости (yz) имѣетъ абсциссу, равную нулю, т.е. удовлетворяетъ заданному ур-iю, и обратно: каждая точка, абсцисса которой равна нулю, непремѣнно лежитъ на плоскости (yz). Значитъ заданное ур-iе есть ур-iе плоскости (yz). На томъ же основанiи можемъ сказать, что плоскость (zx) будетъ имѣть ур-iе $y=0$, а плоскость (xy) — уравненiе $z=0$.

Итакъ ур-iя координатныхъ плоскостей суть

$$\left.\begin{array}{l}(yz)\text{------}\ x=0.\\(zx)\text{------}\ y=0.\\(xy)\text{------}\ z=0.\end{array}\right\}\text{------}(2).$$

Вообразимъ теперь плоскость параллельную плоскости (yz) и на разстояніи a отъ нея. Какую бы теперь точку мы ни взяли, на данной плоскости, всегда ея разстояніе отъ (yz) будетъ a, т. е. всегда абсцисса ея равна a: $x=a$ --- (3).

Фиг. 53.

Если обратно задать какую-нибудь точку, имѣющую абсциссу a, то она непремѣнно будетъ лежать на данной плоскости. Поэтому ур-iе этой плоскости и есть $x=a$.

На томъ же основаніи можемъ сказать, что ур-iя плоскостей параллельныхъ плоскостямъ (zx) и (xy) и отстоящихъ отъ нихъ первая на разстояніи b, вторая на разстояніи c будутъ:

$$y=b \quad \text{и} \quad z=c \text{------}(4).$$

Найдемъ теперь ур-iя осей координатъ. Возьмемъ, напр., ось OX лежитъ на плоскости (zx), значитъ, она должна удовлетворять ур-iю этой плоскости $y=0$. Но такъ какъ эта прямая лежитъ также и на плоскости (xy), то точки ея удовлетворяютъ также уравненію $z=0$. Итакъ всѣ точки, лежа-

ція на Ox удовлетворяютъ одновременно обоимъ ур-іямъ, т. е. совокупность этихъ двухъ ур-ій выражаетъ ось $X^{\text{овъ}}$. Повторяя тѣ же разсужденія относительно остальныхъ двухъ осей, получаемъ слѣдующія ур-ія координатныхъ осей:

$$\left.\begin{array}{l} \text{ур. } Ox \ldots \begin{cases} y=0 \\ z=0. \end{cases} \\ \text{ур. } Oy \ldots \begin{cases} z=0 \\ x=0 \end{cases} \\ \text{ур. } Oz \ldots \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \end{array}\right\} \quad \ldots (5)$$

Вообще въ аналит. геометріи въ пространствѣ однимъ ур-іемъ выражается поверхность, а двумя ур-іями линія. Въ самомъ дѣлѣ, есть дано ур-іе, связывающее x, y и z, то придавая всевозможныя значенія для x и y получаемъ каждый разъ соотвѣтственное разстояніе для z. При этомъ каждый разъ совокупность этихъ трехъ чиселъ даетъ новую точку, геометрическое мѣсто которыхъ образуетъ поверхность. Если даны два ур-ія, то геометрическимъ мѣстомъ точекъ, удовлетворяющихъ обоимъ ур-іямъ, будетъ пересѣченіе двухъ поверхностей, т. е. линія. Пусть намъ дана прямая, параллельная оси Ox. Она пересѣчетъ плоскость (yz) въ какой-нибудь точкѣ $A(b,c)$. Чтобы опредѣлить ур-ія AL, проведемъ черезъ нее двѣ плоскости соотвѣт=

Фиг. 54.

ственно параллельнымъ плоскостямъ (XY) и (ZX). Тогда ур-iя этихъ плоскостей суть:

$$y = b; \quad z = c.$$

Всѣ точки прямой AL удовлетворяютъ какъ тому, такъ и другому ур-iю, слѣдовательно, ур-iями AL служатъ:

$$\left.\begin{matrix} y = b \\ z = c \end{matrix}\right\} \text{ур. прямой, паралл. оси } X^{\text{овъ}} \ldots (6)$$

На томъ же основанiи ур-iя прямыхъ, параллельныхъ двумъ другимъ осямъ суть:

$$\left.\begin{matrix} \left.\begin{matrix} z = c \\ x = a \end{matrix}\right\} \text{ур. прямой, паралл. оси } Y^{\text{овъ}} \\ \left.\begin{matrix} x = a \\ y = b \end{matrix}\right\} \quad - \quad - \quad - \quad Z^{\text{овъ}} \end{matrix}\right\} (6a).$$

Перемѣщенiе координатъ.

Пусть дана координатная система (X, Y, Z). Перемѣстимъ ее такъ, чтобы онѣ оставались параллельны самимъ себѣ, и назовемъ координаты новаго начала O' черезъ a, b, c. Пусть

фиг. 55.

дана точка P, координаты которой въ старой системѣ суть X_1, Y_1, Z_1, въ новой x', y', z'; требуется вывести зависимость между координатами новой и старой системы. Вообразимъ для этого, что перемѣщенiе совершилось не сразу, а послѣдовательно, такимъ образомъ, что:

1) сначала мы передвинули систему такъ что начало 0 передвинулось по оси $X^{овъ}$ на разстоянiи $OA = a$ и оси оставались параллельны самимъ себѣ; ось $Z^{овъ}$ при томъ осталась та-же. Понятно, что при этомъ высота z точки P не измѣнилась, ибо плоскость (XY) не измѣнила положенiя; плоскость (ZX) также осталась прежняя, поэтому и ордината y остается безъ измѣненiя. Абсцисса-же X, вслѣдствiе того, что плоскость (YZ) приблизилась къ точкѣ P на величину a, уменьшилась на a. Такъ что, если старыя координаты точки P были x, y, z, то теперь онѣ будутъ 1) $x-a$, y, z.

2) Теперь начало A перемѣщается параллельно оси $y^{овъ}$ до точки B, причемъ $AB = b$. Здѣсь горизонтальная плоскость и задняя вертикальная остались тѣ-же, что и въ первой вспомогательной системѣ, а боковая вертикальная приблизилась на b. Поэтому изъ координатъ 1) измѣняется только y, именно уменьшается на величину b, такъ что координаты точки P въ системѣ, начало которой B, будутъ:

2) $x-a$, $y-b$, z.

3) Наконецъ начало поднимается вертикально вверхъ до O' и такимъ образомъ мы получаемъ нашу новую систему. Чтобы получить координаты точки P въ этой системѣ, стоитъ лишь замѣнить въ координатахъ 2) z черезъ $z-c$

3). $x-a$, $y-b$, $z-c$.

Итакъ, если перемѣстить координатную систему параллельно самой себѣ, такъ что координаты новаго начала въ старой системѣ суть a, b, c, то координаты точки P будутъ въ новой системѣ:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x-a. \\ y' &= y-b. \\ z' &= z-c. \end{aligned}\right\} \text{------} \quad (7).$$

и наоборотъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= x'+a. \\ y &= y'+b. \\ z &= z'+c. \end{aligned}\right\} \text{----} \quad (7^a)$$

Основныя задачи.

Задача I. Опредѣлить разстояніе точки отъ начала.

Пусть дана точка $P(x, y, z)$. Опускаемъ изъ P перпендикуляръ на плоскость (XY) пересѣченіе его съ плоскостью обозначимъ черезъ Q. Изъ Q проводимъ параллель къ оси Oy. Тогда координаты точки P будутъ:

$x = OR$, $y = RQ$, $z = QP$.

Фиг. 56.

Проведемъ теперь линіи OQ и OP. Тогда $\angle OQP$ будетъ прямой, ибо PQ перпендикулярна къ плоскости (XY). Поэтому можемъ написать:

$$\overline{OP}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{QP}^2.$$

Изъ прямоугольнаго же тр-ка ORQ имѣемъ:

$$\overline{OQ}^2 = \overline{OR}^2 + \overline{RQ}^2.$$

Отсюда: $\overline{OP}^2 = \overline{OR}^2 + \overline{RQ}^2 + \overline{QP}^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

$$OP = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \text{ - - - - - - - } (8).$$

Задача II. Опредѣлить разстояніе между двумя точками, изъ которыхъ ни одна не совпадаетъ съ началомъ.

Пусть данныя точки суть $P_1(x_1 y_1 z_1)$ и $P_2(x_2 y_2 z_2)$. Изъ обѣихъ точекъ опускаемъ перпендикуляры P_1Q_1 и P_2Q_2 на плоскость (XY). Соединимъ Q_1 съ Q_2.

Черезъ P_1 проводимъ параллель къ Q_1Q_2. Углы $Q_1Q_2P_2$ и P_1RP_2 суть прямые, отсюда

$$P_1P_2^2 = P_1R^2 + RP_2^2 = Q_1Q_2^2 + (Q_2P_2 - Q_2R)^2 =$$
$$= Q_1Q_2^2 + (Q_2P_2 - Q_1P_1)^2 \text{ - - - } (9).$$

Абсциссы и ординаты точекъ Q_1 и Q_2 соотвѣтственно равны $x_1 y_1$ и $x_2 y_2$, поэтому, на основаніи формулы (1) аналит. геометріи на плоскости

Фиг. 57.

$$Q_1Q_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)$$

Подставляя это значеніе въ формулу (9) и замѣчая, что $Q_1P_1 = z$ и $QP_2 = z_2$, получаемъ:

$$\overline{P_1P_2}^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2 \text{ - - - } (10).$$

такъ что искомое разстояніе P_1P_2 будетъ:

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \text{ - - - } (11).$$

○ Можно было бы привести рѣшеніе этой задачи къ предыдущей. Для этого переносимъ начало въ P_1 такъ чтобы оси оставались параллельны сами себѣ. Координаты точки P_2 въ старой системѣ были x_2, y_2, z_2, а въ новой будутъ x'_2, y'_2, z'_2. Тогда изъ фор=

X', X_1, Z, Z_1, P_1, P_2, Y', Y, O, X

Фиг. 58.

мулы (8) имѣемъ:

$$P_1P_2 = \sqrt{x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2} \quad --- (12).$$

Координаты точки P_2 въ новой системѣ по формуламъ (7) выражаются:

$$x_2' = x_2 - x_1,$$
$$y_2' = y_2 - y_1,$$
$$z_2' = z_2 - z_1.$$

Подставляя эти значенія въ ур-іе (12) получаемъ:

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}.$$

Задача III. Опредѣлить ур-іе шара.

Поверхность шара есть геометрическое мѣсто точекъ, равноотстоящихъ отъ данной точки, — центра шара. Пусть центръ имѣетъ координаты a, b, c, а радіусъ равенъ r; тогда по формулѣ (10) имѣемъ:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2 \quad --- (13).$$

Это и есть искомое ур-іе шара.

Пусть даны точки $P_1(x_1 y_1 z_1)$ и $P_2(x_2 y_2 z_2)$ и на прямой, соединяющей ихъ, еще третья точка P, которая опредѣляется отношеніемъ разстояній до P_1 и P_2. По стран. 58 мы знаемъ, что положеніе точки P опредѣлено однозначно, коль скоро намъ извѣстно отношеніе:

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \lambda.$$

Требуется опредѣлить координаты точки P въ зависимости отъ координатъ x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 и λ. Опускаемъ на плоскость (XY) перпен-

дикуляры P_1Q_1, P_2Q_2 и PQ. Тогда прямыя P_1P_2 и Q_1Q_2 лежатъ въ одной плоскости, и слѣдовательно дѣлятся параллельными прямыми на части пропорціональныя. Отсюда

$$\frac{Q_1Q}{QQ_2}=\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda,$$

а т. к. абсциссы и ординаты точекъ P_1, P_2, P и Q_1, Q_2, Q одинаковы, то, основываясь на теоремѣ изъ плоской аналитической геометріи (стр. 80), можемъ написать:

Фиг. 59.

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Остается найти выраженіе для z. Для этого опускаемъ перпендикуляры изъ точекъ P_1, P_2 и P на плоскость (ZX) и строимъ ихъ пересѣченіе R_1, R_2 и R съ этою плоскостью. Высоты z_1, z_2 и z точекъ R_1, R_2 и R равны высотамъ точекъ P_1, P_2 и P. Кромѣ того, замѣчая, что прямыя P_1P_2 и R_1R_2 лежатъ въ одной плоскости, находимъ:

$$\frac{R_1R}{RR_2}=\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda.$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Итакъ, любая точка P, лежащая на прямой

P_1P_2, имѣетъ координаты:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \\ y &= \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \\ z &= \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \end{aligned}\right\} \text{-------} (14),$$

гдѣ $\lambda = \frac{P_1P}{PP_2}$.

Если $P_1P = PP_2$, то $\frac{P_1P}{PP_2} = \lambda = 1$

Подставляя это значеніе въ ур-іе (14). получаемъ формулу, опредѣляющую середину, разстоянія между двумя точками P_1 и P_2:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1+x_2}{2} \\ y &= \frac{y_1+y_2}{2} \\ z &= \frac{z_1+z_2}{2} \end{aligned}\right\} \text{------} (15).$$

Полярныя координаты.

Пусть дана точка P. Соединимъ ее съ началомъ и проведемъ плоскость черезъ OP и OZ. На слѣдѣ OQ этой плоскости лежитъ основаніе Q перпендикуляра изъ точки P на плоскость (XY), причемъ $\angle OQP = d$.

Пусть $\angle QOP = \psi$, $\angle XOQ = \varphi$, $OP = r$

Это суть полярныя координаты точки P; r называется радіусомъ-векторомъ, φ — долготой

Фиг. 60.

а ψ <u>широтой</u> точки P.

Для однозначности r всегда положительно, ψ изменяется отъ $-90°$ до $+90°$, а φ — отъ $0°$ до $360°$.

$$r \geqq 0; \quad -90° \leqq \psi \leqq +90°; \quad 0° \leqq \varphi \leqq 360°.$$

Опредѣлимъ связь между полярными и прямоугольными координатами

Прямоугольныя координаты точки P суть:

$$OR = x; \quad RQ = y; \quad QP = z \text{ ----- } (16).$$

Изъ прямоугольнаго тр-ка OQP имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} OQ &= OP \cos\psi. \\ QP &= OP \sin\psi. \end{aligned}\right\} \text{ ------- } (17).$$

а изъ тр-ка ORQ

$$OR = OQ \cdot \cos\varphi.$$
$$RQ = OQ \cdot \sin\varphi.$$

Подставляя, въ эти ур-ія вмѣсто OQ значеніе (17) получаемъ:

$$OR = OP \cdot \cos\psi \cos\varphi$$
$$RQ = OP \cdot \cos\psi \cdot \sin\varphi,$$

а сопоставляя съ значеніями x, y, z изъ формулъ (16) находимъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\psi \cdot \cos\varphi. \\ y &= r\cos\psi \cdot \sin\varphi. \\ z &= r\sin\psi. \end{aligned}\right\} \text{ ---- } (18).$$

Выведемъ теперь обратныя формулы. Замѣчая, что r есть разстояніе точки P отъ начала, имѣемъ по ур-ію (8):

$$r = +\sqrt{x^2+y^2+z^2} \text{ ---- } (19).$$

Корень берется съ плюсомъ, ибо r всегда положительно. Эту формулу могли бы получить, складывая ур-ія (18), возвысивъ ихъ предварительно въ квадратъ:

$$x^2+y^2+z^2=r^2\cos^2\psi\cdot\cos^2\varphi+r^2\cos^2\psi\sin^2\varphi+r^2\sin^2\psi=$$
$$=r^2\left[\cos^2\psi(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+\sin^2\psi\right]=$$
$$=r^2(\cos^2\psi+\sin^2\psi)=r^2.$$

Легко было бы также выразить синусъ и косинусъ угловъ ψ и φ помощью x, y, z, но если даны численныя значенія этихъ координатъ, то лучше не пользоваться этими общими формулами, а опредѣливъ r изъ формулы (19), подставить значеніе его въ третье изъ ур-iй (18). Тогда получаемъ:
$$\sin\psi=\frac{z}{r}.$$

Отсюда мы можемъ опредѣлить $\cos\psi$ помощью формулы $\cos\psi=\sqrt{1-\sin^2\psi}$, а подставляя эти значенія r и $\cos\psi$ въ первыя два ур-ія (18), получимъ также $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. Система полярныхъ координатъ употребляется весьма часто; въ особенности, когда всѣ точки лежатъ на шаровой поверхности, т.е. когда r постоянно.

Фиг. 61.

Въ случаѣ земной поверхности φ наз. географической долготой, а ψ географической широтой. Точки, имѣющія φ постоянные, лежатъ на одномъ

меридіанъ, а широта ψ постоянное — на одной параллели.

Въ астрономіи, если A совпадаетъ съ зенитомъ, то φ наз. азимутомъ, а ψ высотою звѣзды. Если же A совпадаетъ съ сѣвернымъ полюсомъ, то φ наз. склоненіемъ, а ψ прямымъ восхожденіемъ свѣтила. Если, наконецъ, A есть сѣверный полюсъ эклиптики, то φ наз. астрономическою долготою, а ψ астрономическою широтою.

Объ отсчитываніи угловъ.

Если двѣ прямыя не пересѣкаются, то угломъ между ними наз. уголъ, составляемый прямыми, параллельными даннымъ, и проходящими черезъ одну точку. При этомъ для устраненія неопредѣленности условливаются во 1$^{\text{хъ}}$) считать одно изъ двухъ направленій данныхъ прямыхъ за положительное, во 2$^{\text{хъ}}$) угломъ между двумя прямыми считается всегда тотъ уголъ, заключенный между положительными направленіями прямыхъ, который меньше двухъ прямыхъ. Уголъ между двумя плоскостями, какъ извѣстно, опредѣляется линейнымъ угломъ, который получается отъ пересѣченія данныхъ

Фиг. 69.

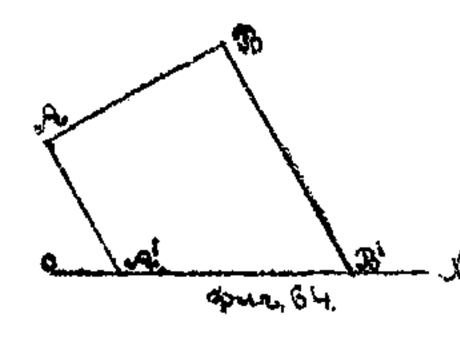
плоскости плоскостью, перпендикулярною къ прямой пересѣченія ихъ. Если изъ точки А возставить перпендикуляры къ обѣимъ плоскостямъ, то составляемый ими уголъ равенъ углу γ между плоскостями. На этомъ

Фиг. 63.

основаніи можно сказать, что угломъ между двумя плоскостями наз. уголъ, составляемый перпендикулярами къ даннымъ плоскостямъ. Во избѣжаніе неопредѣленности можно различать у каждой плоскости двѣ стороны (верхнюю и нижнюю), изъ которыхъ одну можно принять за положительную, другую за отрицательную. Тогда угломъ между двумя плоскостями слѣдуетъ считать уголъ, составляемый перпендикулярами, возставленными къ положительнымъ сторонамъ плоскостей.

Ортогональныя проэкціи

Пусть на плоскости дана прямая OX. Проведемъ черезъ данныя точки А и В, параллельныя прямыя. Тогда точки пересѣченія этихъ прямыхъ съ прямою OX, т.е. точки A' и B' назыв. проэкціями точекъ А и В на прямую OX. Прямая OX назыв. осью проэкціи,



фиг. 64.

прямыя AA' и BB' **проэктирующими лучами**, а направленіе прямыхъ AA' и BB' **направленіемъ проэкціи**. Если въ частномъ случаѣ проэктирующіе лучи перпендикулярны къ оси проэкцій, то проэкція наз. **ортогональною**. Мы разсмотримъ только ортогональныя проэкціи. Пусть въ пространствѣ даны прямая l' и точка A внѣ ея. Если черезъ A провести плоскость, перпендикулярную къ l' и пересѣкающую ее въ точкѣ A', то A' наз. **ортогональною проэкціею** точки A на прямую l', ось проэкціи.

Фиг. 65.

Пусть дана еще точка B. Чтобы найти ея проэкцію, проводимъ черезъ нее плоскость, перпендикулярную къ l' и опредѣляемъ ея пересѣченіе B' съ прямою l'. Тогда $A'B'$ есть ортогональная проэкція отрѣзка AB. Такъ какъ мы разсматриваемъ только ортогональныя проэкціи, то въ слѣдующемъ подъ проэкціею будемъ подразумѣвать всегда ортогональную проэкцію. Докажемъ, что между отрѣзками и ихъ проэкціями существуетъ связь, выражае=

мой формулою:

$$A'B' = AB \cdot \cos\gamma, \text{------} (20)$$

гдѣ γ есть уголъ, составленный прямою l съ осью проэкцій l'.
Для доказательства проведемъ черезъ A параллель къ l'. Тогда, по стр. 126, $\angle BAC = \angle\gamma$.
Отрѣзки параллельныхъ между параллельными равны, поэтому $AC = A'B'$.
Такъ какъ $\angle ACB = d$, то отсюда слѣдуетъ

$$AC = AB \cdot \cos\gamma.$$

или $$A'B' = AB \cdot \cos\gamma,$$

что и требовалось доказать.
Если положительное направленіе AB составляетъ съ положительнымъ направленіемъ оси проэкцій тупой уголъ, то проэкція $A'B'$ направлена въ отрицательную сторону прямой l' и поэтому считается отрицательной; но въ этомъ случаѣ и $\cos\gamma < 0$, такъ что формула (20) справедлива и тогда, если принимать въ разсчетъ знаки величинъ AB, $A'B'$ и $\cos\gamma$.
Если AB параллельна l', то $\angle\gamma = 0$, а $\cos\gamma = 1$.
Тогда $$AB = A'B'.$$
Если AB перпендикулярна къ l', то $\angle\gamma = 90°$; $\cos\gamma = 0$.
Поэтому $$A'B' = 0,$$
т. е. проэкція представляетъ точку.
Теперь разсмотримъ проэкціи на пло-

скость. Пусть дана плоскость проэкцiи E и внѣ ея точка A. Изъ A опускаемъ перпендикуляръ на плоскость E и обозначимъ его основанiе черезъ A'. Тогда A' есть ортогональная проэкцiя точки A на плоскость E. Мы и здѣсь займемся лишь ортогональными проэкцiями. Если дана еще точка B съ своею проэкцiею B', то A'B' есть проэкцiя отрѣзка AB на плоскость E. Пусть дана еще третья точка C и ея проэкцiя C'. Соединивъ между собою точки A, B, C, а также A', B', C' мы говоримъ, что тр-къ A'B'C' есть проэкцiя тр-ка ABC на плоскость E.

Фиг. 66.

Между площадями этихъ тр-ковъ существуетъ связь, выражаемая слѣдующей формулой:

$$\Delta A'B'C' = \Delta ABC \cos\gamma \quad ---(21),$$

гдѣ γ есть уголъ наклоненiя плоскости тр-ка ABC къ плоскости E.

Примемъ прямую пересѣченiя этихъ плоскостей за ось X-овъ координатной системы. Проведемъ любую плоскость перпендикулярно къ ребру OX. Пусть она пересѣчетъ плоскость тр-ка ABC по прямой OY, и плоскость треуголь-

Фиг 67

нина $A'B'C'$ по Oy'. Тогда уголъ $y'Oy = \gamma$ измѣряетъ наклоненіе обѣихъ плоскостей. Обозначивъ координаты вершинъ тр-ковъ въ соотвѣтственныхъ плоскостяхъ (XY) и $(X'Y')$, какъ указано на чертежѣ, можемъ найти ихъ площади (стр. 38).

$$\Delta ABC = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta A'B'C' = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1' & y_1' \\ 1 & x_2' & y_2' \\ 1 & x_3' & y_3' \end{vmatrix}.$$

Если черезъ A и A' проложить плоскость, перпендикулярную къ Ox, то она пересѣчетъ плоскости обѣихъ треугольниковъ по линіямъ, параллельнымъ къ Oy и Oy'. и сходящимся въ точкѣ M оси $X^{овъ}$. Очевидно OM есть абсцисса точки A

$$x_1' = x_1$$

Такимъ же образомъ находимъ, что точки B и B', C и C' имѣютъ одинаковыя абсциссы, итакъ.

$$x_1' = x_1$$

$$x_2' = x_2,$$

$$x_3' = x_3.$$

Дальше MA есть ордината точки A, и MA' ордината точки A'. Но MA' есть проэкція отрѣзка MA на плоскость (XY), поэтому

$$y_1' = y_1 \cos\varphi$$
а также
$$y_2' = y_2 \cos\varphi$$
$$y_3' = y_3 \cos\varphi$$

Подставляемъ полученныя значенія въ формулу площади тр-ка $A'B'C'$

$$\Delta A'B'C' = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1\cos\varphi \\ 1 & x_2 & y_2\cos\varphi \\ 1 & x_3 & y_3\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}\cos\varphi = \Delta ABC\cos\varphi$$

Такимъ образомъ мы убѣдимся въ справедливости формулы (91).

Косинусы направленія.

Воспользуемся ученіемъ о проэкціяхъ для рѣшенія слѣдующей задачи.

Опредѣлить углы, образуемые радіусомъ-векторомъ данной точки съ осями координатъ.

Пусть дана точка $P(x, y, z)$; OP есть радіусъ-векторъ, который назовемъ черезъ ρ. Радіусъ-векторъ образуетъ съ осями координатъ различные углы,

Фиг. 68.

для которыхъ примемъ слѣдующія обозначенія:

$\angle\alpha=\angle(OP, Ox)$; $\angle\beta=\angle(OP, Oy)$; $\angle\gamma=\angle(OP, Oz)$.

Требуется найти соотношение между этими углами и координатами точки P. Опускаемъ изъ P перпендикуляръ PQ на плоскость (xy), изъ Q опускаемъ перпендикуляръ QR на ось Ox. Но PQ также перпендикулярна къ Ox, и. т. она перпендикулярна къ плоскости (xy). Отсюда плоскость PQR перпендикулярна къ оси Ox; значитъ, по предыдущему, R есть проэкція P на прямую Ox. Проэкція точки O на Ox есть сама точка O; отсюда OR есть проэкція отрѣзка OP на Ox. Значитъ, по формулѣ (20).

$$OR = OP \cdot \cos\angle(OP, Ox).$$

Но $OR=x$, $OP=r$, $\angle(OP,Ox)=\alpha$; подставляя эти значенія, получаемъ: $x = r\cos\alpha$.

Такимъ же образомъ можно вывести соотвѣтственныя ур-ія для y и z, такъ что мы получаемъ слѣдующія значенія:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\alpha. \\ y &= r\cos\beta. \\ z &= r\cos\gamma \end{aligned}\right\} \text{------} \quad (22)$$

Углы α, β, γ называются <u>углами направленія</u>, а $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ <u>косинусами направленія</u> прямой OP. Между послѣдними существуетъ связь, для опредѣленія которой возвышаемъ ур-ія (22) въ ква=

драть и складываемъ:

$$x^2+y^2+z^2=r^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)$$

На стр. 120 мы нашли, что

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

По подстановкѣ получаемъ важное соотношеніе:

$$\underline{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.}$$

Если вообразимъ прямую, параллельную OP, то она образуетъ съ осями тѣ-же углы, что и OP, на этомъ основаніи предыдущую теорему можно обобщить слѣдующимъ образомъ: <u>Сумма квадратовъ косинусовъ направленія всякой прямой съ осями координатъ равна единицѣ.</u>

<u>Задача</u> Опредѣлить косинусы направленія прямой, проходящей чрезъ двѣ данныя точки.

Пусть даны точки $P_1(x_1\,y_1\,z_1)$ и $P_2(x_2\,y_2\,z_2)$. Введемъ слѣдующія обозначенія:

$$\angle\alpha=\angle(P_1P_2,Ox).$$

$$\angle\beta=\angle(P_1P_2\,Oy)$$

$$\angle\gamma=\angle(P_1P_2,Oz)$$

Фиг. 69.

Если чрезъ P_1 и P_2 проложимъ плоскости, перпендикулярныя къ Ox, то въ пересѣченіи ихъ съ Ox получимъ проэкціи точекъ P_1 и P_2. Пусть первая пересѣкаетъ Ox въ точкѣ A_1, вторая въ точкѣ A_2. Тогда A_1A_2 есть проэкція отрѣзка P_1P_2 на ось Ox. Отсюда по формулѣ 20)

$$A_1A_2=P_1P_2\cos\alpha.$$

$$\cos\alpha = \frac{A_1A_2}{P_1P_2} \quad \text{-------- (24).}$$

Такъ какъ плоскости, перпендикулярныя къ Ox, параллельны плоскости (yz), то OA и OA_2 суть абсциссы точекъ P_1 и P_2:

$$OA_1 = x_1, \qquad OA_2 = x_2,$$

$$OA_2 - OA_1 = A_1A_2 = x_2 - x_1$$

Кромѣ того по формулѣ (11):

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Подставляя значенія A_1A_2 и P_1P_2 въ ур-іе (24), получаемъ выраженіе для $\cos\alpha$. Такимъ же образомъ находимъ выраженія для $\cos\beta$ и $\cos\gamma$.

$$\left.\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}\\
\cos\beta &= \frac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}\\
\cos\gamma &= \frac{z_2-z_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}
\end{aligned}\right\} \text{- (25).}$$

Сумма квадратовъ этихъ выраженій также равна единицѣ, чѣмъ подтверждается справедливость предыдущей теоремы.

Прямая линія.

Только что выведенными формулами мы воспользуемся для вывода ур-ій прямой линіи. Пусть прямая задана лежащею на ней

точкою $P_1(x_1, y_1, z_1)$ и направленіемъ. Возьмемъ на прямой еще любую точку $P(x, y, z)$, тогда, какъ мы только что вывели, косинусъ угла прямой съ осью $X^{овъ}$ равенъ разности абсциссъ точекъ P и P_1, дѣленной на разстояніе PP_1. Обозначая разстояніе PP_1 черезъ u, получаемъ:

$$\cos\alpha = \frac{x - x_1}{u},$$

отсюда

$$x - x_1 = u \cos\alpha.$$

Такимъ же образомъ находимъ выраженія для разности остальныхъ координатъ точекъ P и P_1, и, перенеся координаты точки P_1 на правую сторону, получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + u\cos\alpha. \\ y &= y_1 + u\cos\beta. \\ z &= z_1 + u\cos\gamma. \end{aligned}\right\} \text{------} (26).$$

Такъ какъ P было взято произвольно, то координаты всѣхъ точекъ прямой удовлетворяютъ ур-іямъ (26). Такимъ образомъ мы получили ур-ія прямой.

По стр. 116 линія выражается двумя ур-іями, у насъ же получились три, вслѣдствіи того, что въ нихъ входитъ перемѣнный параметръ u. Для исключенія его рѣшимъ ур-ія относительно u.

$$u = \frac{x - x_1}{\cos\alpha}; \quad u = \frac{y - y_1}{\cos\beta}, \quad u = \frac{z - z_1}{\cos\gamma}.$$

Отсюда:
$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma} \text{ ----- } (27).$$

Очевидно эти равенства замѣняютъ два

ур-ія, слѣдовательно, мы получили систему двухъ ур-ій, выражающихъ прямую линію, заданную точкою, лежащею на ней, и направленіемъ. Опредѣлимъ теперь ур-ія прямой, заданной двумя точками, напр., P_1 и P_2. Для этого стоитъ только въ ур-іяхъ (27) замѣнить $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ черезъ выраженія (25). Тогда искомыя ур-ія получаются въ видѣ:

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2}=\frac{y-y_1}{y_1-y_2}=\frac{z-z_1}{z_1-z_2} \quad \text{---} \quad (28).$$

Задача. Опредѣлить $\angle\vartheta$, образуемый двумя прямыми (Въ общемъ случаѣ прямыя могутъ скрещиваться, а не пересѣкаться). Пусть направленіе прямой l опредѣлено углами направленія α, β, γ, а другой прямой l_1 углами направленія $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. Проведемъ черезъ начало координатъ прямыя, соотвѣтственно параллельныя прямымъ l и l_1. Эти прямыя образуютъ уголъ ϑ и понятно, что углы направленія ихъ будутъ тѣже, что и у прямыхъ l и l_1. Откладываемъ на нихъ отъ начала равные отрѣзки:

$$OP_1=OP=r.$$

Тогда по формуламъ (22).

Фиг. 70.

$$\left.\begin{array}{ll} x = r\cos\alpha, & x_1 = r\cos\alpha_1, \\ y = r\cos\beta, & y_1 = r\cos\beta_1, \\ z = r\cos\gamma, & z_1 = r\cos\gamma_1 \end{array}\right\} \text{------} (29)$$

Соединивъ точку P_1 съ P, получаемъ тр-къ OPP_1. Изъ тригонометріи извѣстно, что

$$\overline{PP_1}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OP_1}^2 - 2\,\overline{OP}\cdot\overline{OP_1}\cos\vartheta.$$

Выразимъ въ этой формулѣ отрѣзки PP_1, OP, OP_1 черезъ координаты точекъ P, P_1 и черезъ r:

$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = 2r^2 - 2r^2\cos\vartheta,$$

$$x^2+y^2+z^2+x_1^2+y_1^2+z_1^2 - 2(xx_1+yy_1+zz_1) = 2r^2 - 2r^2\cos\vartheta.$$

Но по формулѣ (8):

$$x^2+y^2+z^2 = r^2.$$

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2 = r^2.$$

Отсюда. $2r^2 - 2(xx_1+yy_1+zz_1) = 2r^2 - 2r^2\cos\vartheta.$

$$r^2\cos\vartheta = xx_1+yy_1+zz_1.$$

Подставляемъ значенія x_1, y_1, z_1 и x, y, z изъ ур-ій (29).

$$r^2\cos\vartheta = r^2(\cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1).$$

$$\cos\vartheta = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1 \text{ --- } (30).$$

Если прямыя перпендикулярны, то $\vartheta = 90^\circ$, $\cos\vartheta = 0$.

Отсюда условіе перпендикулярности прямыхъ:

$$\cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1 = 0 \text{ --- } (31).$$

Круговой конусъ.

Задача. Опредѣлить геометрическое мѣсто прямыхъ линій, проходящихъ черезъ точку $M(a, b, c)$ и образующихъ съ прямой AB, за=

данного углами направленія α, β, γ, постоянный уголъ ϑ, т. е. опредѣлить ур-іе конуса вращенія, заданнаго осью, вершинами и угломъ между образующими и осью. Возьмемъ какую-нибудь образующую конуса и на ней любую точку $P(x, y, z)$; углы направленія прямой MP обозначимъ черезъ λ, μ, ν. Изъ ур-ій (25) имѣемъ:

Z, A, $M(a, b, c)$, $P(x, y, z)$, O, y, x, B, Фиг. 71.

$$\left.\begin{aligned} \cos\lambda &= \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}} \\ \cos\mu &= \frac{y-b}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}} \\ \cos\nu &= \frac{z-c}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}} \end{aligned}\right\} (32).$$

Изъ ур-ія (30) получаемъ:

$$\cos\vartheta = \cos\lambda \cdot \cos\alpha + \cos\mu \cos\beta + \cos\nu \cos\gamma.$$

Подставляя значенія $\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu$ изъ формулъ (32) находимъ:

$$\cos\vartheta = \frac{(x-a)\cos\alpha + (y-b)\cos\beta + (z-c)\cos\gamma}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}.$$

Освобождая ур-іе отъ корня и знаменателя, получаемъ искомое ур-іе

$$\left[(x-a)\cos\alpha + (y-b)\cos\beta + (z-c)\cos\gamma\right]^2 = \left[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\right]\cos^2\vartheta \quad \ldots (33).$$

Зная это уравненіе намъ легко будетъ доказать, что кривыя второго порядка получаются посредствомъ сѣченія конуса плоскостью.

Чтобы пересѣчь конусъ, напр., плоскостью

(xy), стоитъ лишь подставить въ найденное ур-іе конуса $z=0$.

Тогда получаемъ:

$$[(x-a)\cos\alpha+(y-b)\cos\beta-c\cos\gamma]^2=[(x-a)^2+(y-b)^2+c^2]\cos^2\vartheta \text{ --- } (34).$$

Какъ видимъ, получается ур-іе второго порядка и этимъ теорема доказана.

Остается опредѣлить, въ какомъ случаѣ мы получимъ эллипсъ, въ какомъ случаѣ гиперболу или, наконецъ, параболу.

Какъ извѣстно (стр. 94), это сводится къ опредѣленію знака $AB-c^2$, причемъ въ нашемъ случаѣ

$$A=\cos^2\alpha-\cos^2\vartheta.$$
$$B=\cos^2\beta-\cos^2\vartheta.$$
$$C=\cos\alpha\cdot\cos\beta.$$

Отсюда

$$AB-c^2=(\cos^2\alpha-\cos^2\vartheta)(\cos^2\beta-\cos^2\vartheta)-\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta=$$
$$=\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta-\cos^2\vartheta\cdot\cos^2\beta-\cos^2\vartheta\cdot\cos^2\alpha+\cos^4\vartheta-\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta=$$
$$=\cos^2\vartheta(\cos^2\vartheta-\cos^2\alpha-\cos^2\beta).$$

Зная по формулѣ (23), что $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, находимъ:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1-\cos^2\gamma=\sin^2\gamma.$$

Подставляя это значеніе, получаемъ:

$$AB-c^2=\cos^2\vartheta\left[\sin^2(90^\circ-\vartheta)-\sin^2\gamma\right].$$

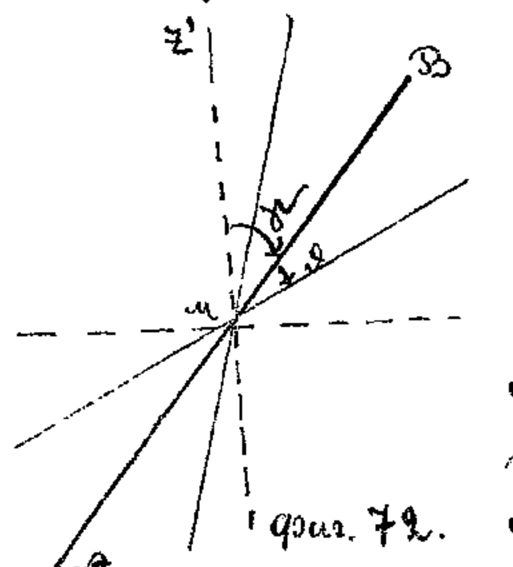
$\cos^2\vartheta$ всегда положителенъ, поэтому знакъ выраженія $AB-c^2$ зависитъ отъ того, какой знакъ будетъ имѣть второй множитель, т. е. будетъ ли $\sin^2(90^\circ-\vartheta)$ больше, меньше или равно

$\sin^2\gamma$.

Но $\sin^2(90°-\vartheta) \gtreqless \sin^2\gamma$, смотря по тому, будетъ ли $90°-\vartheta \gtreqless \gamma$,

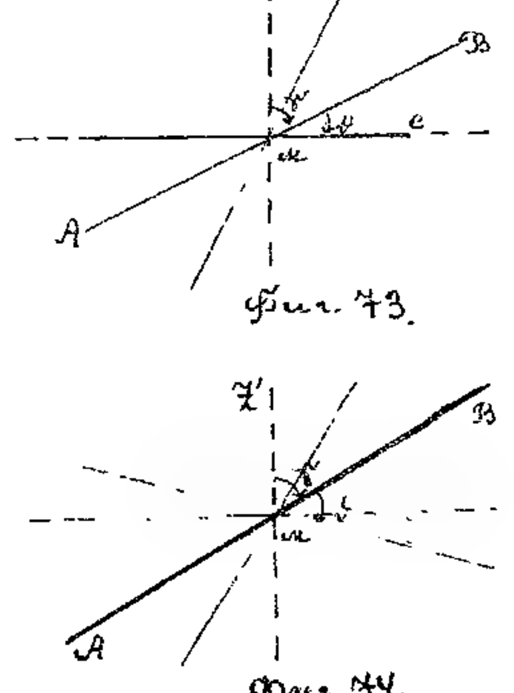
или $\gamma+\vartheta \lesseqgtr 90°$

Въ первомъ случаѣ мы получаемъ эллипсъ, во второмъ параболу, въ третьемъ гиперболу. Это соотношеніе можно наглядно пояснить чертежомъ. Пусть прямая AB представляетъ ось кругового конуса, которую для ясности полагаемъ лежащую въ плоскости чертежа, а точка M вершину его. Если черезъ вершину провести прямую MZ' параллельную оси $Z^{овъ}$, то уголъ BMZ' равенъ углу, составляемому осью AB конуса съ осью $Z^{овъ}$, т.е. углу γ. Если теперь проложить плоскость черезъ AB и MZ' (въ нашемъ случаѣ это будетъ плоскость чертежа), то она пересѣчетъ конусъ по двумъ образующимъ, которыя составляютъ съ осью AB уголъ ϑ. Пусть $\gamma+\vartheta<90°$ (фиг. 72). Если проведемъ теперь черезъ M вершину плоскость параллельную сѣкущей, т.е. перпендикулярную къ MZ', ибо сѣкущая плоскость есть плоскость (XY) перпендикулярная къ оси $Z^{овъ}$), то ясно, что эта плоскость будетъ имѣть съ конусомъ лишь одну общую



фиг. 72.

точку M. Въ этомъ случаѣ, отъ сѣченія конуса плоскостью (XY) получимъ эллипсъ. Въ случаѣ параболы $\gamma+\vartheta=90^\circ$ (ф. 73). Изъ чертежа ясно, что въ этомъ случаѣ плоскость, проведенная черезъ вершину M, параллельно сѣкущей плоскости, пройдетъ черезъ образующую MC и соприкасается съ конусомъ вдоль этой образующей.



Фиг. 73.

Фиг. 74.

Наконецъ, въ случаѣ гиперболы имѣемъ $\gamma+\vartheta>90^\circ$ (ф. 74). Здѣсь плоскость проведенная параллельно сѣкущей черезъ M, пересѣчетъ конусъ по двумъ образующимъ. Итакъ кривая, получаемая при сѣченіи кругового конуса плоскостью будетъ гиперболою, параболою или эллипсомъ, въ зависимости отъ того, пересѣкаетъ ли плоскость, проведенная черезъ вершину конуса параллельно сѣкущей плоскости, данный конусъ по двумъ образующимъ, касается ли она конуса вдоль одной образующей, или не имѣетъ съ нимъ ни одной общей образующей.

Плоскость.

Если въ ур-іи (33) придать ϑ частное

значеніе $\theta = 90°$, то это ур-іе будетъ изображать геометрическое мѣсто прямыхъ линій, пересѣкающихъ прямую AB въ точкѣ M подъ прямымъ угломъ. Это геометрическое мѣсто очевидно будетъ плоскостью, перпендикулярною къ прямой, углы направленія которой суть α, β, γ и которая проходитъ черезъ точку (a, b, c). Слѣдовательно, ея ур-іе мы получимъ, подставляя въ ур-іе (33) $\cos\theta = 0$.

$$(x-a)\cos\alpha + (y-b)\cos\beta + (z-c)\cos\gamma = 0 \quad \text{---} (35)$$

фиг. 75

Опустимъ изъ начала O перпендикуляръ OL на данную плоскость. Координаты точки L обозначимъ черезъ a, b, c.

Такъ какъ разстояніе $OL = p$ есть радіусъ-векторъ точки L, то по формуламъ (22) имѣемъ ур-ія:

$$\left.\begin{aligned} a &= p\cos\alpha \\ b &= p\cos\beta \\ c &= p\cos\gamma \end{aligned}\right\} \quad \text{-----} (36).$$

Такъ какъ въ ур-іи (35) a, b, c обозначаютъ координаты произвольной точки плоскости, то вмѣсто нихъ можно подставить частныя значенія (36); тогда получаемъ:

$$(x - p\cos\alpha)\cos\alpha + (y - p\cos\beta)\cos\beta + (z - p\cos\gamma)\cos\gamma = 0.$$

Раскрывъ скобки, получимъ:

$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = 0.$

Но по формулѣ (23): $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$

Отсюда: $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ - - - (37).

Это есть такъ называемое ур-іе плоскости въ нормальной формѣ, гдѣ положеніе плоскости опредѣлено разстояніемъ p отъ начала и углами направленія α, β, γ перпендикуляра на плоскость.

Мы получили два вида ур-ія плоскости, причемъ оба ур-ія первой степени. Можно предположить, что всякое ур-іе первой степени изображаетъ плоскость. Легко доказать справедливость этого предположенія.

Общій видъ ур-ія I-ой степени съ тремя перемѣнными есть:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ - - - - - } (38).$$

Если намъ удастся привести это ур-іе къ виду (37), то теорема будетъ доказана.

Въ уравненіи (37) мы замѣчаемъ, что сумма квадратовъ коэффиціентовъ при x, y, z равна единицѣ (форм. 23).

Этимъ мы можемъ воспользоваться для приведенія уравненія (38) къ виду уравненія (37). Умножая первое на неопредѣленнаго множителя μ, получимъ:

$$\mu Ax + \mu By + \mu Cz + \mu D = 0 \text{ - - - - } (39).$$

Предположимъ, что полученное ур-іе тождественно съ ур-іемъ (37); тогда

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \mu A. \\ \cos\beta &= \mu B. \\ \cos\gamma &= \mu C. \\ -p &= \mu D. \end{aligned}\right\} \text{-------------(40).}$$

Если теперь намъ удастся выразить μ посредствомъ A, B, C, то тождественность взятыхъ ур-ій будетъ очевидна.

Возводя первыя три равенства (40) въ квадратъ и складывая ихъ, получаемъ:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \mu^2 A^2 + \mu^2 B^2 + \mu^2 C^2,$$

$$\text{или } 1 = \mu^2 (A^2 + B^2 + C^2).$$

$$\text{откуда } \mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Подставляя это значеніе въ ур-іе (39), получаемъ:

$$\frac{Ax}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \frac{By}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \frac{Cz}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0,$$

при чемъ, дѣйствительно, сумма квадратовъ коэффиціентовъ при x, y, z равна единицѣ. Сравнивая полученное ур-іе съ ур-іемъ (37) находимъ:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ \cos\beta &= \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ \cos\gamma &= \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \end{aligned}\right\} \text{------(41)}$$

$$p = \frac{-D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \text{ ------(42)}$$

Посредствомъ этихъ формулъ мы всегда можемъ изъ общаго ур-ія (32) опредѣлить косинусы угловъ направленія перпендикуляра къ данной плоскости и разстояніе ея отъ начала, т. е. это ур-іе дѣйствительно всегда выражаетъ плоскость. Знакъ плюсъ или минусъ передъ корнемъ мы получимъ смотря по тому, какое изъ двухъ противоположныхъ направленій перпендикуляра мы считаемъ положительнымъ.

Примѣръ: Пусть дана плоскость

$$3x+4y+12z-6=0.$$

Требуется найти длину перпендикуляра, опущеннаго изъ начала на плоскость, и его углы направленія.

Сравнивая данное ур-іе съ общимъ, находимъ:

$$A=3,\quad B=4,\quad C=12,\quad D=-6.$$

Слѣдовательно,

$$p=\frac{6}{\sqrt{3^2+4^2+12^2}}=\frac{6}{\sqrt{9+16+144}}=\frac{9}{\sqrt{169}}=\frac{9}{13}.$$

$$\cos\alpha=\frac{3}{13},\quad \cos\beta=\frac{4}{13}\cdot\cos\gamma=\frac{12}{13}.$$

При помощи ур-ій (41) и (42) легко опредѣлить положеніе плоскости въ различныхъ частныхъ случаяхъ.

Положимъ $A=0$; тогда

$$\cos\alpha=0$$

Въ этомъ случаѣ плоскость параллельна оси X овъ.

Такимъ же образомъ убѣдимся, что если $B=0$, то плоскость параллельна оси Yовъ, и если $C=0$, то она параллельна оси Zовъ. Если $D=0$, то $p=0$, т.е. плоскость проходитъ черезъ начало системы. Если $A=0$ и $B=0$, то плоскость параллельна какъ оси Xовъ, такъ и оси Yовъ, слѣдовательно, она параллельна всей координатной плоскости (XY). Ур-іе плоскости въ этомъ случаѣ принимаетъ видъ:

$$Cz + D = 0$$

$$\text{или} \quad z = -\frac{D}{C}$$

Сравнивая это ур-іе съ ур-іемъ (4), находимъ:

$$-\frac{D}{C} = c,$$

т.е. $-\frac{D}{C}$ есть разстояніе нашей плоскости отъ плоскости (XY). Если теперь положимъ $A=0$ и $D=0$, то плоскость параллельна оси Xовъ и проходитъ черезъ начало, т.е. она проходитъ черезъ ось Xовъ и т.д.

Прямыя пересѣченія плоскости съ координатными плоскостями называются <u>слѣдами</u> ея.

Пусть требуется опредѣлить слѣдъ плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

на плоскость (XY). Для этого стоитъ только подставить въ это ур-іе $z=0$; тогда получаемъ ур-іе искомаго слѣда:

$$Ax + By + D = 0.$$

Такимъ же образомъ подставляя $x=0$

или $y=0$, находимъ:

слѣдъ плоскости на плоскость (yz): $By+Cz+D=0$.

" " " (zx): $Ax+Cz+D=0$.

Также легко опредѣлить пересѣченіе данной плоскости съ осями координатъ, напр., съ осью $x^{овъ}$. Для этого стоитъ лишь подставить

$$y=0,$$
$$z=0..$$

ибо совокупность этихъ двухъ ур-ій изображаетъ ось $x^{овъ}$. Тогда получаемъ:

$$x=-\frac{D}{A}.$$

$-\frac{D}{A}$ есть отрѣзокъ, отсѣченный отъ оси $x^{овъ}$. Обозначая отрѣзки, отсѣкаемые отъ осей данною плоскостью черезъ a, b, c, получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} a&=-\frac{D}{A}. \\ b&=-D/B. \\ c&=-D/C. \end{aligned}\right\}------(43).$$

Ур-іе (38) мы можемъ представить въ видѣ:

$$\frac{A}{D}x+\frac{B}{D}y+\frac{C}{D}z=1.$$

или $$\frac{x}{-D/A}+\frac{y}{-D/B}+\frac{z}{-C/B}=1.$$

Подставляя сюда значенія (43), получаемъ:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.----(44).$$

Найденное ур-іе изображаетъ плоскость, отсѣкающую на осяхъ отрѣзки a, b, c отъ начала координатной системы.

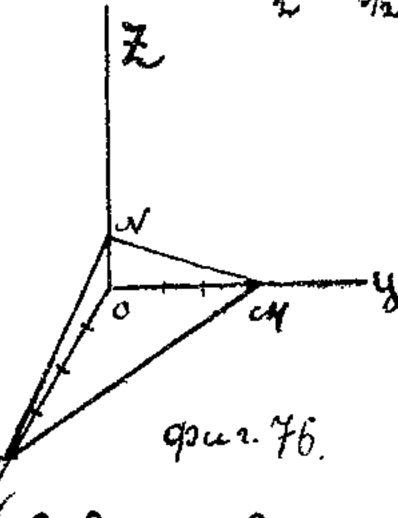
Примѣръ: Пусть требуется опредѣлить разстояніе отъ начала, на которыхъ пло-

скость

$$3x+4y+12z=6.$$

пересѣкаетъ координатныя оси.
Приводимъ данное ур-іе къ виду (44), дѣля его на 6:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3/2}+\frac{z}{1/2}=1.$$



фиг. 76.

Слѣдовательно, $a=2$, $b=\frac{3}{2}$, $c=\frac{1}{2}$. Если отложимъ полученныя разстоянія на осяхъ, то очевидно, слѣды плоскости пройдутъ черезъ полученныя точки L, M, N.

<u>Задача</u> Опредѣлить уголъ между двумя плоскостями.

Пусть даны плоскости:

$$1)\ Ax+By+Cz+D=0.$$

$$2)\ A'x+B'y+C'z+D'=0$$

Уголъ, образуемый этими плоскостями равенъ углу, заключающемуся между перпендикулярами на эти плоскости.

Мы уже видѣли (41), что косинусы направленій перпендикуляра на плоскости 1) выражаются:

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\ \cos\beta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\ \cos\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\ (45)$$

Соотвѣтственно этому, косинусы направленій перпендикуляра на плоскость 2) суть:

$$\cos\alpha'=\frac{A'}{\pm\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}};\ \cos\beta'=\frac{B'}{\pm\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}};\ \cos\gamma'=\frac{C'}{\pm\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}\ \cdots(46).$$

Извѣстно также (стр. 138), что уголъ между двумя прямыми опредѣляется изъ формулы:

$$\cos\Lambda = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cdot\cos\gamma'.$$

Слѣдовательно, желая получить уголъ между перпендикулярами на наши плоскости, подставляемъ сюда значенія ихъ косинусовъ направленія. Тогда получаемъ:

$$\cos\Lambda = \pm\frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}} \quad \text{-----}(47)$$

Этотъ уголъ, какъ выше сказано, выражаетъ въ то же время и уголъ между данными плоскостями. Двоякій знакъ передъ выраженіемъ (47) соотвѣтствуетъ двумъ смежнымъ угламъ, которые образуются данными плоскостями. Если двѣ плоскости перпендикулярны между собою, то $\Lambda = 90°$, $\cos\Lambda = 0$. Чтобы въ выраженіи (47) $\cos\Lambda$ былъ равенъ нулю, необходимо и достаточно, чтобы числитель равнялся нулю. Отсюда находимъ, что условіемъ перпендикулярности двухъ плоскостей является:

$$AA' + BB' + CC' = 0 \quad \text{-----}(48).$$

Для того, чтобы плоскости были параллельны между собой, надо, чтобы перпендикуляры на эти плоскости имѣли косинусы направленія равные между собой. или противоположно равные:

$$\cos\alpha = \pm\cos\alpha'$$

$$\cos\beta = \pm\cos\beta'.$$
$$\cos\gamma = \pm\cos\gamma'.$$

Подставляемъ сюда соотвѣтственныя значенія изъ ур-ій (45) и (46):

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \pm\frac{A'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}},$$

$$\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \pm\frac{B'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}},$$

$$\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \pm\frac{C'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}.$$

Отсюда
$$\pm\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}} = \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}.$$

Слѣдовательно, въ случаѣ параллельности двухъ плоскостей, коэффиціенты при x, y, z въ ур-іяхъ ихъ должны быть пропорціональны:

$$\left.\begin{aligned} A' &= \mu A. \\ B' &= \mu B. \\ C' &= \mu C. \end{aligned}\right\} \quad (49)$$

Подставимъ въ ур-іе второй плоскости значенія (49)

$$\mu Ax + \mu By + \mu Cz + D' = 0.$$

Раздѣлимъ на μ, получаемъ:

$$Ax + By + Cz + D'/\mu = 0.$$

Отсюда мы видимъ, что ур-ія параллельныхъ плоскостей можно всегда привести къ такому виду, чтобы они различались только постояннымъ членомъ.

<u>Коническія и цилиндрическія поверхности.</u>

<u>Коническими поверхностями</u> называются та=

нія поверхности, которыя получаются, если прямая, проходящая черезъ данную точку M, скользитъ по данной кривой. Эта прямая наз. __образующею__, точка M __вершиною__, а кривая, по которой образующая скользитъ, __направляющей__ конической поверхности. Круговой конусъ есть частный случай конической поверхности, когда направляющею служитъ окружность, а вершина лежитъ на перпендикулярѣ, возстановленномъ изъ центра круга къ плоскости его. Если коническая поверхность отнесена къ координатной системѣ, начало которой совпадаетъ съ вершиною, то она каждою плоскостью, проходящею черезъ начало, пересѣчется по несходящимъ прямымъ проходящимъ черезъ начало. Слѣдовательно, ур-іе конической поверхности всегда можно привести къ такому виду, что если изъ него и общаго ур-ія $Ax+By+Cz=0$ исключить одну изъ величинъ x, y, z (т. е. найти сѣченіе конической поверхности плоскостью, проходящею черезъ начало), то въ результатѣ получится ур-іе, которое можно разложить на множителей $I^{ой}$ степени. Если прямая линія, скользя по данной кривой, все время остается параллельна самой себѣ, то получается __цилиндрическая поверхность__. Прямая называется __образующею__, а кривая — __направляю__ -

ющего цилиндрической поверхности.
Если цилиндрическая поверхность перпендикулярна къ одной изъ координатныхъ плоскостей, напр., къ плоскости (XY), то она совершенно опредѣлена своимъ слѣдомъ на этой плоскости.
Случай этотъ опредѣляется ур-іемъ, въ которое входятъ только двѣ координаты x, y; слѣдовательно, ур-іе цилиндрической поверхности можно всегда привести къ такому виду, чтобы оно содержало обозначенія только двухъ координатъ.

Поверхности второго порядка.

Поверхностями второго порядка называются такія поверхности, которыя изображаются ур-іями второй степени.
Мы изслѣдуемъ только частные виды ур-ій этихъ поверхностей, которыя получаются, если отнести поверхность къ спеціально выбранной координатной системы. При этомъ, за исключеніемъ эллиптическаго конуса, мы не будемъ разсматривать коническихъ и цилиндрическихъ поверхностей второго порядка, т.е. такихъ коническихъ и цилиндрическихъ поверхностей, направляющую которыхъ служитъ кривая второго порядка.
Поверхности второго порядка раздѣляются на двѣ группы: поверхности, имѣющія центръ и поверхности, не имѣющія центра. Къ первой группѣ принадлежатъ:

Эллипсоидъ: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ----- (50).

Рѣшимъ это ур-іе относительно z.

$$z=\pm c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

Каждой парѣ значеній x и y соотвѣтствуютъ два значенія для z, равныхъ по абсолютной величинѣ, и различныхъ по знаку. Это служитъ доказательствомъ того, что наша поверхность симметрична относительно плоскости (xy). Рѣшая ур-іе относительно другихъ переменныхъ x и y, найдемъ, что разсматриваемая поверхность симметрична также относительно другихъ плоскостей координатъ. Желая найти сѣченіе поверхности плоскостью, параллельною одной изъ координатныхъ плоскостей, напр. плоскостью (yz), стоитъ лишь въ ур-іе (50) подставить $x=\alpha$.

Тогда получимъ: $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{\alpha^2}{a^2}$

Это и есть ур-іе искомаго сѣченія. Оно второй степени, слѣдовательно, изображаетъ коническое сѣченіе. Видя, что коэффиціенты при y^2 и z^2 имѣютъ одинаковые знаки, мы заключаемъ, что полученное сѣченіе будетъ эллипсъ, если только правая часть больше нуля ($\alpha^2 < a^2$). Если же правая часть меньше нуля ($\alpha^2 > a^2$), то мы не получаемъ дѣйствительной кривой, т. е. поверхность не пересѣкается такою плоскостью. Значитъ эллипсоидъ

лежитъ весь между двумя плоскостями, параллельными плоскости (YZ) и отстоящими отъ нея по объ стороны на разстояніи a. Если плоскость, параллельная плоскости (YZ), пересъкаетъ эллипсоидъ, то мы можемъ сказать, что это съченіе будетъ эллипсъ. Если вмъсто d подставить $-d$, то получимъ эллипсъ, равный первому; т.е. если пересъкать эллипсоидъ плоскостями, параллельными плоскости (YZ) и равно отстоящими по объ стороны отъ этой плоскости, то получаемъ одинаковыя съченія. Это указываетъ на то, что, какъ мы уже раньше нашли, поверхность симметрична относительно плоскости (YZ).
Если въ ур-іе (50) подставить $y=\pm e$ или $z=\pm f$, то получаются пересъченія эллипсоида съ плоскостями, параллельными плоскости (ZX) или (XY):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{e^2}{b^2}, \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{f^2}{c^2}.$$

Изъ этихъ ур-ій разсужденіями, подобными предыдущимъ найдемъ, что эллипсоидъ и этими плоскостями пересъкается по эллипсамъ и что онъ весь заключается внутри двухъ плоскостей, параллельныхъ плоскости (ZX) и отстоящихъ отъ нея на разстояніи $\pm b$, и еще внутри двухъ другихъ плоскостей, которыя отстоятъ отъ плоскости (XY) по объ стороны на $\pm c$.

Такимъ образомъ вся наша поверхность заключается внутри прямоугольнаго параллелепипеда со сторонами, равными $2a$, $2b$ и $2c$.

<u>Однополый гиперболоидъ:</u> $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ....(II).

Рѣшая это ур-іе относительно z, получимъ:

$$z=\pm c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}.$$

Придавая всевозможныя значенія для x и y, получимъ для каждой пары такихъ значеній два значенія для z, различныя лишь по знаку; значитъ разсматриваемая поверхность симметрична относительно плоскости (XY). Рѣшая затѣмъ наши ур-ія относительно y и x убѣждаемся, что поверхность симметрична также относительно плоскостей (ZX) и (YZ). Чтобы получить сѣченіе плоскостью, параллельною къ плоскости (YZ), подставляемъ $x=\pm d$.

$$-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{d^2}{a^2}.$$

Полученное ур-іе второй степени, слѣдовательно, представляетъ коническое сѣченіе; коэффиціенты при y^2 и z^2 съ обратными знаками, слѣдовательно мы получили гиперболу. Такъ какъ при $+d$ и при $-d$ получаемъ равныя гиперболы, то наша поверхность симметрична относительно плоскости (YZ). Пересѣчемъ теперь поверхность плоскостью

параллельною плоскости (ZX)

$y=\pm e$. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1+\frac{e^2}{b^2}$.

Полученное ур-іе изображаетъ эллипсъ. Такъ какъ правая часть всегда положительна, то последнимъ ур-іемъ всегда изображается эллипсъ. Значитъ всякая плоскость, параллельная плоскости (ZX) пересекаетъ нашу поверхность.

Наконецъ подставляемъ $z=\pm f$.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{f^2}{c^2}.$$

Получаемъ опять гиперболу.

Такъ какъ гипербола продолжается до безконечности, то отсюда следуетъ, что и наша поверхность должна простираться до безконечности.

Однополый гиперболоидъ замечателенъ темъ, что онъ принадлежитъ къ такъ называемымъ <u>линейчатымъ</u> поверхностямъ. Ур-іе гиперболоида можно представить въ такой форме:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z^2}{c^2}\text{------}(52).$$

Разлагая обе части на множителей, получаемъ:

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=\left(1-\frac{z}{c}\right)\left(1+\frac{z}{c}\right)\text{---}(53).$$

Этому уравненію можно также удовлетворить, если вместо него взять следующія два уравненія:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}-\frac{y}{b}&=\left(1-\frac{z}{c}\right)\lambda\\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}&=\frac{1+\frac{z}{c}}{\lambda}\end{aligned}\right\}\text{----------} (54).$$

Дѣйствительно, если опредѣлить въ одномъ изъ нихъ λ и подставить въ другое, то мы получимъ ур-іе (53). Ур-ія (54) суть первой степени, слѣдовательно, изображаютъ плоскости. Всѣ точки, удовлетворяющія этимъ обоимъ ур-іямъ, должны также удовлетворять и ур-ію нашей поверхности. Но точки, лежащія одновременно на двухъ плоскостяхъ, образуютъ прямую пересѣченія этихъ плоскостей, т.е. совокупность ур-ій (54) изображаетъ прямую линію, лежащую на поверхности гиперболоида. Придавая всевозможныя значенія для λ, получаемъ цѣлую систему такихъ прямыхъ, называемыхъ <u>образующими</u> однополаго гиперболоида. Ур-іе (53) можно также замѣнить слѣдующими 2-мя:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}-\frac{y}{b}&=\left(1+\frac{z}{c}\right)\mu\\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}&=\frac{1-\frac{z}{c}}{\mu}\end{aligned}\right\}\text{----} (55),$$

которыя опять изображаютъ плоскости, но уже не тѣ, которыя выражались ур-іями (54). Значитъ существуетъ еще другая система образующихъ однополаго гиперболоида, который слѣдовательно

состоитъ изъ двухъ системъ, прямолинейныхъ образующихъ. Всякая поверхность, состоящая изъ прямыхъ линій, называется <u>линейчатою поверхностью</u>. Можно доказать, что каждая образующая не пересѣкается съ образующими своей системы, и встрѣчается съ каждою образующею другой системы. Если въ ур-іи однополаго гиперболоида на правой части нуль, то получается ур-іе конуса:

<u>Конусъ.</u> $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ - - - - - (56)

Поступая по предыдущему, легко убѣдиться, что и эта поверхность симметрична относительно всѣхъ трехъ координатныхъ плоскостей.

Чтобы найти сѣченіе конуса плоскостью, (yz), подставляемъ $x=0$.

$$-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Разлагая на два ур-ія первой степени, получаемъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{z}{c}-\frac{y}{b}=0.\\ \frac{z}{c}+\frac{y}{b}=0.\end{aligned}\right\},$$

т. е. плоскость (yz) пересѣкаетъ конусъ по двумъ прямымъ.

Подставляя въ ур-іе (56) $z=0$, находимъ:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$

или $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$; $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$.,

т.е. плоскость (XY) также пересѣкаетъ конусъ по двумъ прямымъ.

Нетрудно убѣдиться въ томъ, что если бы мы пересѣкли конусъ плоскостью, параллельною плоскости (YZ) или (XY), то въ обоихъ случаяхъ получили бы гиперболы.

Пересѣчемъ теперь конусъ плоскостью (ZX), для чего подставляемъ $y=0$.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Такъ какъ невозможно, чтобы сумма двухъ положительныхъ величинъ равнялась нулю, то мы должны положить $x=0$ и $z=0$. Но по условію и $y=0$; слѣдовательно, наше сѣченіе представляетъ точку, именно вершину конуса.

Пересѣкая конусъ плоскостью параллельною (ZX), получаемъ эллипсъ.

Пусть однополый гиперболоидъ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{------------} (57)$$

и конусъ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ ------------ (58)

отнесены къ одной и той же координатной системѣ. Если обѣ поверхности пересѣчь плоскостью $z=0$, то мы получимъ сѣченія:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ — — — для гиперболоида}$$

и $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ или $\left.\begin{array}{l}\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0.\\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0.\end{array}\right\}$ для конуса

Но по стр. 88 послѣднія два ур-ія представляють ассимптоты гиперболы, получившейся отъ сѣченія гиперболоида. Такимъ же образомъ можно найти, что и всякая другая плоскость, проходящая черезъ начало и пересѣкающая гиперболоидъ по гиперболѣ, вырѣзываетъ изъ конуса пару образующихъ служащихъ ассимптотами этой гиперболы. Поэтому конусъ (58) называется <u>ассимптотнымъ конусомъ гиперболоида</u> (57).

<u>Двуполый гиперболоидъ:</u> $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$...... (59)

Рѣшая это ур-іе относительно каждой изъ координатъ x. y. z, видимъ, что поверхность симметрична относительно трехъ координатныхъ плоскостей. Опредѣлимъ сѣченіе поверхности плоскостями, параллельными координатнымъ плоскостямъ:

$$x=\pm d \qquad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{d^2}{a^2}-1.$$

Если $\frac{d^2}{a^2}>1$, то правая часть положительна, и мы получаемъ эллипсъ. Если $\frac{d^2}{a^2}=1$, то правая часть равна нулю. Тогда необходимо $y=0$, $z=0$, т. е. сѣченіе представляетъ точк. Если $\frac{d^2}{a^2}<1$, то правая часть отрицательна, тогда какъ лѣвая положительна. Въ этомъ случаѣ, значит, плоскость не пересѣкаетъ поверхности, такъ что двуполый гиперболоидъ состоитъ изъ двухъ отдѣльн. частей, лежащихъ внѣ пространства, огран

ченнаго двумя плоскостями, параллельными плоскости (YZ) и находящимися на разстояніи a по объ стороны отъ нея.

Подставляя въ ур-іе (59) $y=\pm e$, и затѣмъ $z=\pm f$, получаемъ:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1+\frac{e^2}{b^2} \text{ и } \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{f^2}{c^2}.$$

Слѣдовательно, сѣченія параллельныя двумъ другимъ координатнымъ плоскостямъ, суть гиперболы. Если въ ур-іи (59) на правой части вмѣсто единицы нуль, то получается ур-іе ассимптотнаго конуса двуполаго гиперболоида.

Къ поверхностямъ второго порядка безъ центра принадлежатъ

Эллиптическій параболоидъ: $x^2+\lambda^2y^2+2pz=0$ ...(60).

Найдемъ сѣченіе поверхности плоскостью, параллельною плоскости (YZ), для чего подставляемъ $x=d$. $\lambda^2y^2+2pz+d^2=0$.

Какъ видно, полученное сѣченіе есть парабола (стр. 72). Такъ какъ для $x=-d$ мы получаемъ то-же самое сѣченіе, то поверхность симметрична относительно плоскости (YZ). Она также симметрична относительно плоскости (ZX), ибо подставляя $y=\pm e$, мы находимъ:

$$x^2-2pz+\lambda^2e^2=0.$$

Эта система сѣченій состоитъ изъ парабол. Сѣченія, параллельныя плоскости (XY), мы получаемъ, подставивъ въ ур-іе (60) $z=f$:

$$x^2+\lambda^2y^2+2pf=0.$$

Эти сѣченія суть эллипсы. Первые два члена послѣд-

наго ур-ія положительны; слѣдовательно, плоскость $z=f$ только въ томъ случаѣ пересѣкаетъ нашу поверхность, когда $2pf<0$, т.е. когда f имѣетъ знакъ отличный отъ знака p. Значитъ поверхность несимметрична относительно плоскости (xy) и вся расположена по одну сторону отъ нея. Если положимъ $z=0$, то получимъ $x^2+\alpha^2y^2=0$, откуда необходимо $x=0$, $y=0$. Итакъ мы видимъ, что плоскость (xy) касается нашей поверхности въ началѣ координатъ.

Гиперболическій параболоидъ: $x^2-\alpha^2y^2+2pz=0$ -- (61).

Сѣченіе поверхности плоскостью, параллельною (yz) будетъ парабола и кромѣ того поверхность симметрична относительно плоскости (yz), ибо подставивъ $x=\pm a$, получаемъ:

$$\alpha^2y^2-2pz-a^2=0.$$

Пересѣкая поверхность плоскостью $y=e$ получаемъ также параболу:

$$x^2+2pz-\alpha^2e^2=0.$$

и видимъ, что поверхность симметрична относительно плоскости (zx). Наконецъ, подставляя $z=f$, получаемъ гиперболу:

$$x^2-\alpha^2y^2+2pf=0.$$

Ур-іе гиперболическаго параболоида (61) можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$(x-\alpha y)(x+\alpha y)=-2pz \text{ ----- } (62).$$

Этому ур-iю можно также удовлетворить если замѣнить его слѣдующими двумя ур-iями:

$$\left.\begin{aligned} x - \alpha y &= -\frac{2pz}{\lambda} \\ x + \alpha y &= \lambda \end{aligned}\right\} \quad \text{----} (63).$$

Такъ какъ эти ур-iя первой степени, то слѣдовательно они изображаютъ плоскости. Точки, соотвѣтствующiя тѣмъ значенiямъ координатъ, которыя удовлетворяютъ обоимъ ур-iямъ (63), должны находиться на поверхности. Геометрическое мѣсто этихъ точекъ будетъ пересѣченiе этихъ плоскостей, т.е. прямая. Итакъ мы получаемъ прямую, лежащую всѣми точками на нашей поверхности. Придавая всевозможныя значенiя для λ, получимъ цѣлую систему такихъ прямыхъ. Слѣдовательно гиперболическiй параболоидъ принадлежитъ къ линейчатымъ поверхностямъ и ур-iя (63) представляютъ ур-iя его образующихъ. Если придавать λ всевозможныя значенiя, то плоскости $x + \alpha y = \lambda$ будутъ отличаться только постояннымъ членомъ, т.е. будутъ параллельны. Такъ какъ въ ур-iя ихъ не входитъ величина z, то они (стр. 147) параллельны оси $Z^{ов}$, такъ что всѣ

получаемыя образующія будутъ лежать въ плоскостяхъ, параллельныхъ оси zовъ и между собой.

Замѣчая, что ур-іе (62) можно удовлетворить также и слѣдующими 2мя ур-ями:

$$\left.\begin{aligned} x+\alpha y &= -\frac{2pz}{\mu} \\ x-\alpha y &= \mu \end{aligned}\right\} \text{----} (64).$$

заключаемъ, что гиперболическій параболоидъ имѣетъ еще вторую систему образующихъ, лежащихъ также въ плоскостяхъ, параллельныхъ между собой и оси zовъ.

Можно было бы еще доказать, что каждая образующая не встрѣчается съ образующими той системы, къ которой она принадлежитъ, но пересѣкается съ каждою образующею другой системы.

Дифференціальное исчисленіе.

Понятіе о функціяхъ и классификаціи ихъ.

Величины, разсматриваемыя въ математикѣ бываютъ двухъ родовъ: постоянныя и перемѣнныя. Постоянной величиною называется такая величина, которая при данномъ изслѣдованіи имѣетъ лишь одно или нѣсколько опредѣленныхъ конечныхъ значеній. Напримѣръ, отношеніе окружности къ діаметру есть величина постоянная, которая имѣетъ одно только значеніе 3,1415926.....

$\sqrt{1}$ имѣетъ два опредѣленныхъ значенія:

$$\sqrt{1} = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$$

$\sqrt[3]{1}$ имѣетъ три опредѣленныхъ значенія:

$$\sqrt[3]{1} = \begin{cases} 1 \\ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \\ \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \end{cases}$$

Примѣромъ постоянныхъ величинъ могутъ служить вообще всѣ цѣлыя и дробныя числа, изучаемыя ариѳметикою.

Если величина можетъ принимать безчисленное множество значеній, то такая величина называется перемѣнною. Съ перемѣнными величинами мы познакомились въ аналитической геометріи, при изученіи кривыхъ. Мы видѣли, что при движеніи точки по какой-нибудь линіи, абсцисса и ордината ея [illegible] мѣняются. Слѣдовательно, принимая всевозможныя значенія, [illegible] являются величинами перемѣнными.

нія.

Другой примѣръ перемѣнныхъ величинъ представленъ формула площади квадрата, сторона котораго равна а.

$$b = a^2$$

а и b могутъ имѣть безконечное множество значеній; значитъ онѣ перемѣнныя величины. Если $a=1$, то $b=1$; если $a=2$, то $b=4$ и т. д. Слѣдовательно а и b не независимы другъ отъ друга. Какъ скоро мы придадимъ а нѣкоторое значеніе, то b получитъ соотвѣтственное опредѣленное значеніе. Такія перемѣнныя величины, которымъ можно придавать произвольныя значенія, наз. независимыми перемѣнными или аргументами. Перемѣнныя, которыя послѣ приданія независимой перемѣнной нѣкотораго численнаго значенія уже не произвольны, а имѣютъ нѣкоторое опредѣленное значеніе, наз. зависимыми перемѣнными или функціями независимой перемѣнной.

Такъ какъ въ нашемъ примѣрѣ, придавая а всевозможныя значенія, мы каждый разъ получимъ опредѣленное значеніе для b, значитъ b есть функція отъ а; или площадь квадрата есть функція его стороны.

По закону Маріотта, объемъ данной массы газа обратно пропорціоналенъ давленію, что высказывается формулою: $v = \frac{a}{p}$.

Всякое измѣненіе давленія вызываетъ соотвѣтственное измѣненіе объема. Слѣдова-тельно объемъ газа есть функція давленія

Если дано ур-іе кривой, то ордината точки кривой есть функція ея абсциссы. Напр. изъ ур-ія параболы $y^2=2px$ мы находимъ:

$$y = \pm\sqrt{2px}.$$

Здѣсь каждому значенію x принадлежитъ не одно, а два значенія y. Если одному значенію аргумента соотвѣтствуютъ не одно, а два или нѣсколько значеній функціи, то такая функція наз. двухъ- или многозначною.

Самое общее опредѣленіе функціи есть слѣдующее: Если два ряда величинъ:

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \ldots\ldots$$

$$y_1 \quad y_2 \quad y_3 \ldots\ldots$$

такъ связаны между собою, что каждому значенію x одного ряда соотвѣтствуетъ одно или нѣсколько значеній y другого ряда, то y называется однозначною или многозначною функціею аргумента x.

На этомъ основаніи мы можемъ назвать функціею и такую перемѣнную, закона зависимости которой отъ аргумента мы не знаемъ, но знаемъ только, что съ измѣненіемъ одной изъ перемѣнныхъ измѣняется и другая, и кромѣ того, можемъ опредѣлить сколько угодно соотвѣтственныхъ паръ численныхъ значеній обѣихъ перемѣнныхъ. Напр., намъ извѣстно, что въ различное время дня температура измѣняется, но намъ не извѣстенъ законъ, по которому измѣряется температура въ зависимости отъ времени, хотя мы и можемъ помощью термометра наблюдать температуру въ каждый моментъ. Мы гово=

рилъ и въ этомъ случаѣ, что температура есть функція времени. Такія функціи называются эмпирическими.
Если-же законъ зависимости функціи отъ аргумента мы можемъ выразить математической формулою, то подобныя функціи мы называемъ математическими.
Послѣднія раздѣляются на алгебраическія и трансцендентныя. Алгебраической функція наз. тогда, если она получается изъ аргумента посредствомъ конечнаго числа слѣдующихъ дѣйствій: сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія, возвышенія въ степень и извлеченія корня. Если же функція образована изъ аргумента помощью безконечнаго числа этихъ дѣйствій или же помощью какихъ-либо другихъ дѣйствій, то такая функція называется трансцендентной. Напр., функція

$$y = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\ldots$$

есть трансцендентная, потому что для полученія y, приходится произвести надъ x безконечное число дѣйствій.
Другимъ примѣромъ трансцендентныхъ функцій могутъ служить функціи:

логариѳмическая: $y = \log x$.
показательная: $y = a^x$.
тригонометрическая: $y = \sin x$; $y = \cos x$.
цикламетрическая: $y = \arcsin x$; $y = \arccos x$.

Алгебраическія функціи дѣлятся на раціональныя и ирраціональныя. Функція наз. раціональною, если аргументъ или членъ, его содержащій, не находится

подъ знакомъ корня. Въ противномъ случаѣ функція называется ирраціональною. Напр.

$y = \frac{ax^2+b}{cx+d}$ функція раціональная

$y = \frac{\sqrt{-x^2}+1}{x+x}$ функція ирраціональная.

Раціональныя функціи въ свою очередь дѣлятся на цѣлыя и дробныя. Если въ выраженіи функціи аргументъ не входитъ дѣлителемъ, то функція наз. цѣлою, въ противномъ случаѣ дробною.

Общій видъ цѣлой раціональной функціи есть:

$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$,

а дробной раціональной функціи

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_{m-1}x + b_m},$$

гдѣ n и m обозначаютъ какія-нибудь цѣлыя и положительныя числа.

Такимъ образомъ мы получаемъ слѣдующую классификацію функцій:

Функціи

математическія — эмпирическія

алгебраическія — трансцендентныя

раціональныя — ирраціональныя

цѣлыя — дробныя

Если y есть функція отъ x, то это обозначаютъ символически ур-іемъ:

$$y = f(x).$$

Кромѣ буквы f, функція преимущественно принято обозначать буквами φ, ψ, F, а также большими буквами $\Phi, \Psi, \dots$, хотя допускается употребленіе и другихъ буквъ.
Если зависимость между двумя перемѣнными выражается ур-ніемъ, не рѣшеннымъ относительно одной изъ нихъ, напр.:

$$3x^2-7x^2-y^2-5=0,$$

то все таки одну изъ перемѣнныхъ называютъ функціей отъ другой. Такая функція называется <u>неявною</u> и символически выражается ур-іемъ:

$$f(x, y)=0.$$

Если рѣшить ур-іе относительно y, то мы получаемъ <u>явную</u> функцію, въ нашемъ случаѣ

$$y=\pm\sqrt{3x^2-7x-5}$$

Это даетъ намъ возможность обобщить понятіе объ алгебраической функціи; если f_0, f_1, $f_2, \dots$ суть алгебраическія функціи, то выраженіе

$$f_0(x)y^n+f_1(x)y^{n-1}+f_2(x)y^{n-2}+\dots+f_{n-1}(x)y+f_n(x)=0 \quad \dots\dots (1).$$

обозначаетъ неявную <u>алгебраическую</u> функцію y отъ x.
Такую неявную алгебраическую функцію можно представить въ болѣе простомъ видѣ.

$$G_0(x)y^m+G_1(x)y^{m-1}+G_2(x)y^{m-2}+\dots+G_{m-1}(x)y+G_m=0 \quad \dots (2),$$

гдѣ G обозначаетъ цѣлую, раціональную функцію.
Проще всего убѣдиться въ этомъ на частномъ примѣрѣ: Пусть дана неявная функція:

$$\sqrt{x-1}\cdot y^2-\frac{y}{\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+1}=0 \quad \dots (3).$$

Очевидно это есть ур-іе вида (1), ибо коэффиціентами степеней y служатъ ирраціональныя функціи. Попробуемъ привести его къ виду (2). Для этого помножимъ его на $\sqrt{x+1}$, тогда получаемъ:

$$\sqrt{x^2-1}\cdot y^2 - y - (x+1) = 0.$$

$$\sqrt{x^2-1}\cdot y^2 = y + (x+1).$$

Возвышемъ въ квадратъ: $(x^2-1)y^4 = y^2 + 2(x+1)y + (x+1)^2$

Перенося всѣ члены въ лѣвую часть, получаемъ:

$$(x^2-1)y^4 - y^2 - 2(x+1)y - (x+1)^2 = 0.$$

Въ полученномъ ур-іи всѣ члены суть цѣлыя раціональныя функціи, т. е. намъ дѣйствительно удалось привести ур-іе (3) къ виду (2).

Изображеніе функцій.

Для геометрическаго изображенія функцій лучше всего пользоваться способомъ, извѣстнымъ изъ аналитической геометріи, т. е. Декартовой координатной системой. При этомъ всевозможныя значенія аргумента откладываемъ по одной оси, а по направленію другой соотвѣтственныя значенія функціи.

Пусть въ теченіе дня наблюдалось слѣдующее измѣненіе температуры, гдѣ h обозначаетъ время, t — температуру.

h	t
4	+1°5
6	+1°7
8	+3°.0
10	+5°.2
12	-9°.0

На прямой линіи откладываемъ равные отрѣзки, соотвѣтствующіе часамъ дня. На перпендикулярахъ,

фиг. 77.

возставленныхъ изъ полученныхъ точекъ, откладываемъ отрѣзки, соотвѣтствующіе температурѣ, причемъ высота каждой клѣтки соотвѣтствуетъ одному градусу. Соединяя полученныя точки прямыми линіями, получаемъ ломанную линію, которая даетъ намъ болѣе или менѣе ясное изображеніе измѣненія температуры. Если бы мы наблюдали температуру не каждые два часа, а каждый часъ, то получили бы ломанную, болѣе подходящую къ истинному измѣненію температуры; а наблюдая температуру въ каждое мгновеніе, мы получили бы кривую линію, изображающую наглядно истинное измѣненіе температуры. Вслѣдствіе невозможности такого наблюденія, на практикѣ пользуются особыми механизмами, которые наносятъ на бумагѣ кривую, соотвѣтствующую измѣненію температуры въ каждый моментъ. Если мы желаемъ опредѣлить температуру соотвѣтствующую $8\frac{1}{2}$ часамъ, по истеченіи этого момента, то на горизонтальной оси откладываемъ отрѣзокъ, соотвѣтствующій $8\frac{1}{2}$ часамъ и изъ полученной точки возставляемъ перпендикуляръ до пересѣченія съ ломанною линіею. Длина этого перпендикуляра дастъ намъ искомую температуру.

Такъ какъ мы знаемъ, что изображеніе измѣненія температуры будетъ не ломанная

но кривая менiя, то лучше приблизительно вычертить кривую.
Соответственное решенiе этой задачи помощью вычисленiя наз. **интерполяцiею.**
Мы разсмотрѣли изображенiе эмпирической функцiи; теперь разсмотримъ изображенiе математическихъ функцiй.
Аналитическая геометрiя даетъ намъ методы для опредѣленiя кривой, изображающей измѣненiе математическихъ функцiй.
Примѣръ I. Въ природѣ часто случается, что двѣ величины измѣняются пропорцiонально одна другой, что выражается формулою:

$$y = ax \text{ - - - - - - - - - - } (4).$$

Если какому-нибудь значенiю x_1 аргумента соотвѣтствуетъ значенiе y_1 функцiи, а значенiю x_2 соотвѣтствуетъ y_2, то можемъ написать:

$$y_1 = ax_1$$
$$y_2 = ax_2.$$

Раздѣливъ первое равенство на второе, получаемъ:

$$y_1 : y_2 = x_1 : x_2,$$

т.е. дѣйствительно формула (4) выражаетъ пропорцiональность перемѣнныхъ x и y.
Такъ какъ ур-iе (4) первой степени, то данная функцiя изображается прямою линiею. Далѣе, видя, что въ ур-iи нѣтъ постояннаго члена, заключаемъ, что прямая проходитъ черезъ начало.
Наклоненiе ея къ оси X овъ опредѣляется изъ ур-iя

Фиг. 78.

ѣдуща.

Если намъ надо опредѣлить значенiе y соотвѣтствующее какому-нибудь значенiю x, то отложивъ на оси Xовъ отрѣзокъ OQ, изображающiй величину x, возставляемъ изъ Q перпендикуляръ до пересѣченiя его съ прямою. Тогда отрѣзокъ QP дастъ намъ искомое значенiе y.

Примѣръ II. Очень часто случается, что величины измѣняются обратно пропорцiонально одна другой. Такой случай мы видѣли въ законѣ Марiотта, гдѣ объемъ газа измѣняется обратно пропорцiонально давленiю. Функцiональная зависимость такого рода выражается ур-iемъ $xy = a$ . . . . . (5).

Въ самомъ дѣлѣ, пусть x_1, y_1 и x_2, y_2 обозначаютъ двѣ пары значенiй перемѣнныхъ, удовлетворяющихъ ур-iю (5); тогда:

$$x_1 y_1 = a.$$
$$x_2 y_2 = a.$$

Слѣдовательно,

$$x_1 y_1 = x_2 y_2$$

или $y_1 : y_2 = x_2 : x_1$

Фиг. 79

Кривая, соотвѣтствующая этой зависимости есть, какъ намъ извѣстно изъ аналитической геометрiи (стр 110) равносторонняя гипербола асимптотами которой служатъ оси координатной системы.

Примѣръ III Для тѣла, падающаго въ без-

воздушномъ пространствѣ зависимость между временемъ t и пройденнымъ пространствомъ s выражается формулой:

$$s = \frac{gt^2}{2}.$$

гдѣ g есть постоянная величина, именно ускореніе тяжести.

Обозначая перемѣнныя t и s черезъ x и y, получаемъ:

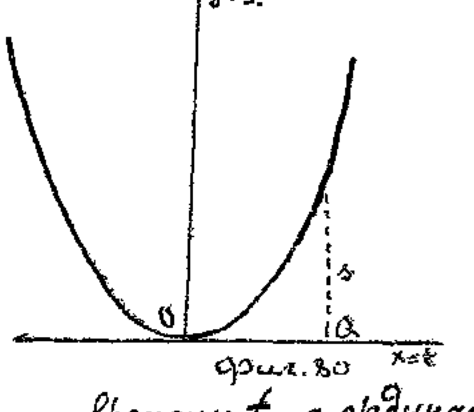
$$y = \frac{gx^2}{2}.$$

Это ур-іе второй степени, слѣдовательно, изображаетъ коническое сѣченіе. Рѣшаемъ его относительно x^2.

$$x^2 = \frac{2}{g}y.$$

Обозначая постоянную $\frac{1}{g}$ черезъ p, получаемъ ур-іе $x^2 = 2py$,

которое, очевидно, изображаетъ параболу, вершина и главная ось которой совпадаютъ съ началомъ и осью ординатъ координатной системы. Абсциссы каждой точки соотвѣтствуютъ значеніямъ времени t, а ординаты пройденному пространству.



фиг. 80

Желая узнать пространство, пройденное тѣломъ во время t, поступаемъ какъ въ предыдущихъ случаяхъ.

Графическій методъ изображенія функцій неточенъ, ибо кривая вычерчивается приблизительно. Въ тѣхъ случаяхъ, гдѣ требуется

большая точность, употребляются таблицы. Намъ известно, напр., таблицы логарифмических и тригонометрических функций.

Обращеніе функцій

Пусть дана явная функція $y=f(x)$, которая изображаетъ какое-нибудь ур-іе, рѣшенное относительно y. Если возможно рѣшить это ур-іе относительно x, то мы получимъ: $x=\varphi(y)$. Т. е. если y есть функція отъ x, то въ общемъ случаѣ и x есть функція отъ y. Это дѣйствіе наз. обращеніемъ функцій. Вторая функція по отношенію къ первой, наз. обратной функціей. Такимъ образомъ, если дана функція

$$y=\sqrt{x+1},$$

то обратная функція выразится:

$$x=y^2-1.$$

Для функціи: $y=x^4-2$.
обратная будетъ: $x=\sqrt[4]{y+2}$.
Такимъ же образомъ функція $y=\sin x$ имѣетъ обратную: $x=\arcsin y$.
Изъ приведенныхъ примѣровъ мы видимъ, что при обращеніи функціи, иррациональная функція можетъ измѣниться въ

раціональную (и наоборотъ), тригонометрическая измѣняется въ циклометрическую и т. д., но при этомъ алгебраическая функція остается алгебраической, трансцендентная трансцендентной.

Разсмотримъ геометрическій способъ обращенія функціи. Пусть дана нѣкоторая кривая LM, изображающая функцію $y = f(x)$.

Фиг. 81.

Если P есть какая-нибудь точка данной кривой, то RP есть ея абсцисса, QP соотвѣтствующее значеніе функціи y. Для полученія изображенія обращенной функціи $x = \varphi(y)$, стоитъ только значенія прежней независимой перемѣнной откладывать по оси ординатъ, а значенія y по оси абсциссъ, при чемъ прежнюю ось $X^{овъ}$ слѣдовало бы переименовать въ ось $Y^{овъ}$ и наоборотъ. Откладывая, напр., ординату точки P по оси $X^{овъ}$, а абсциссу ея по оси $Y^{овъ}$, получаемъ точку P', которая принадлежитъ къ изображенію обратной функціи.

Если провести биссектрису угла XOY, то точка P и P' лежатъ на перпендикулярѣ къ ней и удалены отъ нея на равное разстояніе, т.е. расположены ортогонально симметрично относительно этой биссектрисы. Отсюда, чтобы по данному изображенію LM функціи по

строить изображение L'M' обратной функціи слѣдуетъ провести биссектриссу угла XOY и построить кривую, ортогонально симметричную съ кривой, относительно этой биссектриссы.

Изображеніе и обращеніе тригонометрическихъ функцій.

Пусть дана тригонометрическая функція $y = \sin x$.

x	y
$-\frac{3}{2}\pi$	$+1.$
$-\pi$	0
$-\frac{\pi}{2}$	$-1.$
0	0
$\frac{\pi}{2}$	$+1.$
π	0
$\frac{3}{2}\pi$	$-1.$
2π	$0.$
$\frac{5\pi}{2}$	$+1.$

(Въ высшемъ анализѣ углы всегда измѣряются длиною дуги, на которую они опираются и которая принадлежитъ къ кругу, радіусъ котораго равенъ единицѣ). Разсмотримъ различныя значенія y въ зависимости отъ значеній x. При этомъ, для отысканія отрицательныхъ значеній, пользуемся формулою $\sin(-x) = -\sin x$. Какъ видимъ, y равно нулю для слѣдующихъ значеній x: ...., $-\pi$, 0, π, 2π, 3π, ...

Всѣ эти выраженія можно соединить въ одномъ: $k\pi$, гдѣ k есть цѣлое положительное или отрицательное число; такъ, если $k = -1$, то получимъ $-\pi$, если $k = 0$, то получимъ $k\pi = 0$ и т. д. Т. е., если x есть цѣлое кратное отъ π, то $y = 0$; это выражается ур-іемъ: $\sin(k\pi) = 0$.

Далѣе замѣчаемъ, что $y = 1$ для слѣдующихъ значеній x:

..... $-\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots\ldots$,

которыя можно выразить еще иначе:

$$(-2+\tfrac{1}{2})\pi,\ (0+\tfrac{1}{2})\pi,\ (2+\tfrac{1}{2})\pi, \ldots\ldots$$

Всѣ эти значенія содержатся въ общемъ выраженіи $(2k+\frac{1}{2})\pi$, гдѣ k обозначаетъ нѣкоторое цѣлое положительное или отрицательное число; такъ что

$$\sin(2k+\tfrac{1}{2})\pi = 1.$$

Возьмемъ теперь тѣ значенія x, для которыхъ $y=-1$: ..... $-\frac{5\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \ldots$

Эти выраженія можемъ представить въ видѣ: ...., $(-2-\frac{1}{2})\pi, (0-\frac{1}{2})\pi, (2-\frac{1}{2})\pi, (4-\frac{1}{2})\pi$, ---

изъ чего видно, что $\sin(2k-\frac{1}{2})\pi = -1$.

Мы знаемъ, что значенія y заключатся всегда между -1 и $+1$; поэтому, если на разстояніи, равномъ единицѣ, проведемъ параллели къ оси X-овъ по обѣ стороны отъ нея, то вся кривая, изображающая данную функцію, заключается внутри этихъ параллелей. Затѣмъ кривая строится, какъ обыкновенно: на оси X-овъ откладываемъ значенія аргумента и на перпендикулярахъ соотвѣтственныя значенія y.

Фиг. 82.

Если бы мы опредѣлили еще промежуточ=

ныя значенія y, то получили бы волнообразную кривую, наз. синусоидой.
Разсмотримъ теперь обратную функцію $x = \arcsin y$, т.е. x равно дугѣ, синусъ которой есть y.
Чтобы построить изображеніе (ф. 82) этой функціи (при чемъ теперь значенія y, какъ независимой переменной откладываемъ на оси $X^{\text{овъ}}$) нужно, какъ извѣстно, провести биссектриссу угла между положительными частями координатныхъ осей и построить кривую, ортогонально-симметричную кривой $y = \sin x$ по отношенію къ этой биссектриссѣ. Поэтому изображеніе обратной функціи будетъ заключаться между параллелями къ оси ординатъ, проведенными на разстояніи единицы отъ нея. Эта кривая, какъ и кривая $y = \sin x$, простирается въ обѣ стороны до безконечности. Желая найти значеніе функціи для какого-нибудь значенія аргумента, мы откладываемъ это значеніе по оси $x^{\text{овъ}}$ и, возставляя перпендикуляръ, получаемъ безконечное число точекъ, соотвѣтствующихъ данному значенію аргумента.
Значитъ наша обратная функція есть не только многозначная, но даже безконечнозначная.
Функціи, обратныя тригонометрическимъ, называются круговыми или циклометрическими. На чертежѣ (фиг. 82) тригонометр. функціи изображе

на сплошною линіею, круговая пунктиромъ.

Займемся теперь функціей: $y = \cos x$.

Придавая различныя положительныя значенія для x, получаемъ соотвѣтственныя значенія для y. Чтобы опредѣлить значенія y, соотвѣтствующія отрицательнымъ значеніямъ x, пользуемся формулою $\cos(-x) = \cos x$.

Мы видимъ, что y получается равнымъ нулю при слѣдующихъ значеніяхъ x:

$$\ldots, -\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$$

или

$$\ldots, (-2+\tfrac{1}{2})\pi, (-1+\tfrac{1}{2})\pi, (0+\tfrac{1}{2})\pi, (1+\tfrac{1}{2})\pi, (2+\tfrac{1}{2})\pi, \ldots$$

x	y
-2π	$+1$.
$-\frac{3}{2}\pi$	0.
$-\pi$	-1.
$-\frac{\pi}{2}$	0.
0	$+1$.
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-1.
$\frac{3\pi}{2}$	0.
2π	$+1$.
$\frac{5\pi}{2}$	0
3π	-1.

т. е. $\cos(k+\frac{1}{2})\pi = 0$.

$y = +1$ для слѣдующихъ значеній x:

$$\ldots -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$$

т. е. когда x есть четное кратное π:

$$\cos(2k\pi) = 1.$$

$y = -1$, когда x имѣетъ значенія

$$\ldots -\pi, \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$$

т. е. когда x есть нечетное кратное отъ π.

$$\cos(2k+1)\pi = -1.$$

Строимъ изображеніе данной функціи, какъ обыкновенно, причемъ оно также заключается между параллелями на разстояніи единицы отъ Ox. Мы видимъ, что наша функція изображается такою же кривою, какъ че-

функція $y = \sin x$. Это и должно быть, если замѣтимъ, что $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$.

Обратная функція будетъ: $x = \arccos y$. Для построенія ея руководимся извѣстными уже правилами. Легко также замѣтить, что наша обратная функція есть безконечная.

Фиг. 83.

Остается еще разсмотрѣть изображеніе функцій tg и ctg. Пусть дана функція: $y = \operatorname{tg} x$.

x	y
$-\frac{\pi}{2}$	$\pm\infty$
$-\frac{\pi}{4}$	$-1.$
0	0
$\frac{\pi}{4}$	$+1.$
$\frac{\pi}{2}$	$\pm\infty$
$\frac{3\pi}{4}$	$-1.$
π	0
$\frac{5\pi}{4}$	$+1.$
$\frac{3\pi}{2}$	$\pm\infty$

По прежнему откладываемъ по оси $X^{овъ}$ отрѣзки, соотвѣтствующіе значеніямъ аргумента. Черезъ точки $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$..... для которыхъ $y = \infty$, проводимъ линіи параллельныя оси $Y^{овъ}$. Построивъ кривую, мы видимъ, что она состоитъ изъ безконечнаго числа вѣтвей, изъ которыхъ каждая простирается до безконечности.

Обратная функція есть: $x = \operatorname{arctg} y$. Построивъ ее, мы видимъ, что и она будетъ безконечно значная.

Фиг. 84

Подобнымъ образомъ можно построить кривыя, соотвѣтствующія функціямъ $y=ctg\,x$ и $x=arc\,ctg\,y$.

Понятіе о предѣлѣ.

Число, состоящее изъ столькихъ положительныхъ единицъ, сколько другое число a содержитъ единицъ положительныхъ или отрицательныхъ наз. абсолютною величиною числа a и обозначается тѣмъ, что a ставится между двумя вертикальными чертами: $|a|$ Такъ абсолютною величиною числа -7 будетъ $+7$; абсолютная величина -7 есть $+7$; для $+7$ абсолютная величина будетъ $+7$

Вообще, если число положительно. $a>0$, то его абсолютная величина $|a|=a$; если же число отрицательно, то оно имѣетъ абсолютную величину $|a|=-a$.

Пусть перемѣнная величина x принимаетъ послѣдовательно рядъ безчисленныхъ значеній:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots x_k, \ldots x_{n-1}, x_n \ldots$$

и пусть существуетъ такое количество a, что разность $x-a$, начиная съ нѣкотораго значенія x, напр., съ x_l все уменьшается по абсолютной величинѣ, такъ что, если $n-1 > l$, то $|x_n-a| < |x_{n-1}-a|$.

Положимъ далѣе, что разность $|x-a|$ дѣлается наконецъ меньше произвольно малой величины ε: $|x-a| < \varepsilon$;

тогда говорятъ, что a есть предѣлъ перемѣнной x, что пишутъ такъ: $\lim x = a$.
lim., т.е. предѣлъ произносится limes или limite. На основанiи сказаннаго, мы можемъ вывести слѣдующее опредѣленiе предѣла:
Если послѣдовательныя значенiя перемѣнной величины x такъ приближаются къ нѣкоторому постоянному количеству a. что абсолютная величина разности $(x-a)$ все уменьшается и наконецъ дѣлается меньше всякой произвольной малой величины ε, то говорятъ, что перемѣнная x имѣетъ предѣлъ a.

Примѣры I и II. Если вписать въ кругъ, правильный тр-къ, то разность между площадью тр-ка и площадью круга равна нѣкоторой величинѣ. Если теперь въ томъ же кругѣ вписать квадратъ, то очевидно разность между его площадью и площадью круга будетъ уже меньше. Такимъ образомъ если увеличивается число сторонъ вписаннаго многоугольника, то эта разность дѣлается все меньше и наконецъ, при достаточномъ увеличенiи числа сторонъ многоугольника, станови́тся меньше произвольной малой величины. Поэтому площадь круга есть предѣлъ площадей вписанныхъ многоугольниковъ при неограниченномъ увеличенiи числа сторонъ. Если описать около круга многоугольникъ и увеличивать число его сторонъ, то опять найдемъ,

что площадь круга будетъ предѣломъ площадей описанныхъ многоугольниковъ, при неограниченномъ увеличеніи числа сторонъ ихъ.

Примѣръ III. Дробь 0,7777..... можно представить въ видѣ суммы:

$$0{,}7777\ldots = \left(\frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\ldots\ldots\right)$$

Можно доказать, что $\frac{7}{9}$ есть предѣлъ этой суммы, при неограниченномъ увеличеніи числа слагаемыхъ:

$$\lim\left(\frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\ldots\ldots\right)=\frac{7}{9}.$$

Для этого стоитъ только разсмотрѣть разности:

$$\frac{7}{9}-\frac{7}{10}=\frac{7}{90}.$$

$$\frac{7}{9}-\frac{7}{10}-\frac{7}{100}=\frac{7}{90}-\frac{7}{100}=\frac{7}{900}=\frac{7}{9\cdot10^2}.$$

$$\frac{7}{9}-\frac{7}{10}-\frac{7}{100}-\frac{7}{1000}=\frac{7}{9\cdot10^2}-\frac{7}{10^3}=\frac{7}{9\cdot100^3}.$$

мы видимъ, что эти разности все уменьшаются и при достаточномъ числѣ слагаемыхъ разность можетъ быть сдѣлана меньше произвольно малой величины. Слѣдовательно, $\frac{7}{9}$ есть предѣлъ разсматриваемой суммы, если число слагаемыхъ неограниченно увеличивать.

Положимъ, что перемѣнная приближается къ нѣкоторому предѣлу, такъ что разность $(x-a)$ можетъ быть сдѣлана меньше произвольно малой величины ε.

$$(x-a)<\varepsilon.$$

Пусть въ то же время другая величина y, которая есть функція отъ x: $y=f(x)$, приближается къ нѣкоторому предѣлу b, т. е. если $|x-a|<\varepsilon$, то

$|y-b|<\delta.$

Тогда говорятъ, что предълъ y для значенія $x=a$ есть b и пишутъ

$$\lim_{x=a} y=b.$$

О безконечно малыхъ величинахъ.

Если предъломъ нѣкоторой перемѣнной служитъ нуль, то говорятъ, что величина этой перемѣнной дѣлается безконечно малою. Иначе говоря, величину называютъ безконечно малою, если ее можно сдѣлать по абсолютной величинѣ меньше произвольно малой величины ε.

Если перемѣнная все растетъ, такъ что абсолютная величина ея дѣлается больше произвольно большой величины N, то величину называютъ безконечно большою:

$$\lim x=\pm\infty.$$

Надъ безконечно малыми величинами можно производить тѣ же дѣйствія, какія производятся надъ конечными величинами. Относительно этихъ дѣйствій можно доказать слѣдующія теоремы:

I Сумма конечнаго числа безконечно малыхъ величинъ есть величина безконечно малая.

Пусть дано конечное число n безконечно малыхъ величинъ:

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots - \varepsilon_n,$$

требуется доказать, что сумма ихъ

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots+\varepsilon_n=\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\varepsilon_\nu.$$

будетъ величина безконечно малая.

Каждое изъ нашихъ слагаемыхъ можно

по абсолютной величине сделать меньше произвольно малой величины, такъ что, если ε обозначаетъ число произвольно малое и положительное, а n число слагаемыхъ, то

$$|\varepsilon_1| < \frac{\varepsilon}{n}$$
$$|\varepsilon_2| < \frac{\varepsilon}{n}$$
$$\dots\dots \quad \text{или вообще } |\varepsilon_\nu| < \frac{\varepsilon}{n},$$
$$|\varepsilon_n| < \frac{\varepsilon}{n}.$$

Слѣдовательно, $\sum_{\nu=1}^{\nu=n} |\varepsilon_\nu| < \varepsilon$.

и тѣмъ болѣе $\left|\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \varepsilon_\nu\right| < \varepsilon$, т.е. въ самомъ дѣлѣ нашу сумму можно сдѣлать по абсолютной величинѣ меньше произвольно малой величины ε.

Если же намъ дано безконечное число безконечно малыхъ величинъ, то сумма ихъ можетъ быть величиною безконечно малою, конечною или даже безконечно большою. Дѣйствительно если A——B раздѣлить отрѣзокъ AB на какое-нибудь число частей, затѣмъ каждую часть опять раздѣлить и такимъ образомъ продолжать, то, наконецъ, дойдемъ до частей безконечно малыхъ, а число ихъ будетъ безконечно велико. Такимъ образомъ сумма безконечнаго числа безконечно малыхъ отрѣзковъ равна конечному отрѣзку AB. Итакъ, если намъ дана сумма безконечнаго числа безконечно малыхъ величинъ, то мы не можемъ заранѣе

сказать, будетъ ли сумма ихъ величина конечная, безконечно малая или безконечно большая.

II. Произведенiе безконечно-малой величины ε_1 на конечную n равно безконечно-малой величинѣ: $\varepsilon_1 n = \varepsilon$.

Дѣйствительно, такъ какъ ε_1 величина безконечно малая, то ε всегда можно выбрать такъ, что $\varepsilon_1 < n\varepsilon$.

Произведенiе двухъ безконечно малыхъ величинъ тоже будетъ величина безконечно-малая:

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon.$$

Такая безконечно-малая величина, полученная изъ произведенiя двухъ безконечно-малыхъ величинъ, называется безконечно-малою величиною второго порядка. Произведенiе трехъ безконечно-малыхъ величинъ даетъ безконечно малую третьяго порядка:

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = \varepsilon \text{ и т. д.}$$

Если дано произведенiе нѣсколькихъ безконечно малыхъ величинъ различнаго порядка, то порядокъ произведенiя равенъ суммѣ порядковъ множителей.

При дѣленiи безконечно-малыхъ величинъ надо различать два случая: 1) дѣлитель величина конечная, 2) дѣлитель величина безконечно-малая.

Въ первомъ случаѣ, т. е. при дѣленiи безконечно-малой величины на конечную, получаемъ безконечно-малую величину: $\frac{\varepsilon_1}{n} = \varepsilon$.

При дѣленіи же безконечно малой на безконечно малую различаютъ 3 случая: 1) порядокъ числителя равенъ порядку знаменателя, 2) порядокъ числителя больше порядка знаменателя, 3) порядокъ знаменателя больше порядка числителя.

1). Намъ извѣстно, что произведеніе безконечно малой величины ε_1 на конечную n равно безконечно малой величинѣ ε:

$$\varepsilon_1 n = \varepsilon,$$

причемъ порядокъ ε равенъ порядку ε_1; раздѣляя обѣ части равенства на ε_1, получаемъ: $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} = n$,

т. е. частное двухъ безконечно-малыхъ величинъ того же порядка есть величина **конечная**.

2). Пусть теперь требуется опредѣлить значеніе частнаго $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$, гдѣ ε_2 есть безконечно-малая величина $n^{го}$ порядка, а порядокъ безконечно малой величины ε_1 пусть равенъ $m > n$. Значитъ ε_2 получилось изъ произведенія n безконечно малыхъ величинъ β_r перваго порядка, а ε_1 изъ произведенія m такихъ же величинъ α_r. Поэтому наше частное можно представить въ видѣ:

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_n \cdot \alpha_{n+1} \cdots \alpha_m}{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n} =$$

$$= \left(\frac{\alpha_1 \cdots\cdots \alpha_n}{\beta_1 \cdots \beta_n}\right) \alpha_{n+1} \alpha_{n+2} \cdots \alpha_m.$$

Въ скобкахъ мы получили частное двухъ безконечно-малыхъ величинъ одинаковаго, именно $n^{го}$ порядка, т. е. величину конечную, которая умножается на величину безконечно малую $\alpha_{n+1}\cdot\alpha_{n+2}\cdots\cdots\alpha_m$, которая есть $m^{го}$ порядка; слѣдовательно, частное $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ есть величина безконечно-малая, причемъ порядокъ его $m-n$ равенъ разности порядковъ числителя и знаменателя.

3). Если дано частное $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$, гдѣ порядокъ ε_1 меньше порядка ε_2, то подобными же выводами находимъ, что это частное есть величина безконечно-большая.

Предѣлъ суммы и предѣлъ произведенія.

Послѣдними теоремами мы воспользуемся для вывода двухъ важныхъ формулъ относительно предѣла суммы и произведенія нѣсколькихъ величинъ.

Теорема I Предѣлъ суммы двухъ перемѣнныхъ величинъ равенъ суммѣ предѣловъ тѣхъ же величинъ.

$$\lim(x+y)=\lim x+\lim y \text{------} (6).$$

Пусть
$$\left.\begin{array}{l}\lim x=a\\ \lim y=b\end{array}\right\} \text{--------} (7).$$

Это значитъ, что разность между x и a, а также между y и b можно сдѣлать меньше произвольно малой величины:

$$\left.\begin{array}{l}x-a=\varepsilon_1\\ y-b=\varepsilon_2\end{array}\right\} \text{--------} (8).$$

гдѣ ε_1 и ε_2 величины произволно малыя.
Сложивъ ур-iя (8), получимъ:

$$(x+y)-(a+b)=\varepsilon_1+\varepsilon_2.$$

Такъ какъ сумма двухъ безконечно малыхъ величинъ даетъ величину безконечно малую, то отсюда слѣдуетъ:

$$(x+y)-(a+b)=\varepsilon,$$

т.е. эту разность можно сдѣлать меньше произвольно-малой величины. Значитъ $(a+b)$ есть предѣлъ перемѣнной $(x+y)$.

$$\lim(x+y)=a+b.$$

Подставивъ значения a и b изъ ур-iй (7) получаемъ: $\lim(x+y)=\lim x+\lim y$,
что и требовалось доказать.
Эта теорема дѣйствительна также и относительно разности двухъ перемѣнныхъ, въ чемъ легко убѣдиться, вычитая второе изъ ур-iй (8) изъ перваго.
Можно распространить эту теорему и на произвольное конечное число перемѣнныхъ. Пусть даны:

$\lim x=a.$	$x-a=\varepsilon_1$	Сложивъ послѣднія равенства получаемъ:
$\lim y=b.$	$y-b=\varepsilon_2.$	
$\lim z=c.$	$z-c=\varepsilon_3$	
. . . .		
. . . .		
$\lim u=n.$	$u-n=\varepsilon_n$	

$$(x+y+z+\ldots+u)-(a+b+c+\ldots+n)=$$
$$=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots+\varepsilon_n=\varepsilon\ldots(9),$$

т.е. разность между суммою постоянныхъ величинъ и суммой перемѣнныхъ можетъ быть сдѣлана меньше произвольной малой

величины, значитъ сумма постоянныхъ есть предѣлъ суммы перемѣнныхъ:

$$\lim(x+y+z+\dots+u)=(a+b+c+\dots+n).$$

Подставляя вмѣсто $a, b, c, \dots n$ ихъ значенія, получимъ: $\lim(x+y+z+\dots+u)=\lim x+\lim y+\dots+\lim u$

Теорема теряетъ силу въ случаѣ безконечнаго числа перемѣнныхъ, ибо въ такомъ случаѣ мы получали бы въ правой части ур. (9) сумму безконечнаго числа безконечно-малыхъ величинъ, которая можетъ и не быть величиною безконечно-малою.

Теорема II. Предѣлъ произведенія двухъ перемѣнныхъ равенъ произведенію предѣловъ этихъ перемѣнныхъ.

$$\lim(xy)=\lim x\cdot\lim y \text{ - - - - } (10).$$

Пусть дано: $\left.\begin{array}{l}\lim x=a.\\ \lim y=b.\end{array}\right\}$ - - - - (11).

Отсюда: $x-a=\varepsilon_1$ или $x=a+\varepsilon_1$
$y-b=\varepsilon_2$ $\quad y=b+\varepsilon_2$.

Перемноживъ почленно, получаемъ

$$xy=ab+a\varepsilon_2+b\varepsilon_1+\varepsilon_1\varepsilon_2.$$

Произведенія $a\varepsilon_2, b\varepsilon_1, \varepsilon_1\varepsilon_2$ суть величины безконечно-малыя, слѣдовательно и сумма ихъ есть безконечно-малая величина ε; отсюда

$$xy=ab+\varepsilon,$$

т. е. величина xy разнится отъ величины ab на безконечно-малую величину, поэтому ab есть предѣлъ xy.

$$\lim(xy)=ab.$$

Сопоставляя съ ур-іемъ (11), находимъ:

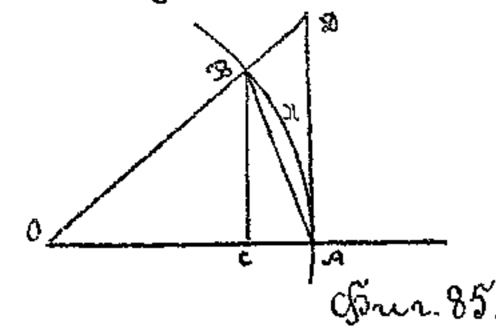
$$\lim(xy)=\lim x\cdot\lim y.$$

Ясно, что и эту теорему можно распростра-
нить на произвольное, но конечное число множителей:

$$\lim(x\cdot y\cdot z\ldots\ldots u)=\lim x\cdot\lim y\cdot\lim z\ldots\lim u.$$

Опредѣленіе $\lim\limits_{x=0}\frac{x}{\sin x}$

Возьмемъ уголъ больше нуля и меньше 90°. Радіусомъ, равнымъ единицѣ, опишемъ дугу $AB=x$. Изъ B опускаемъ перпендикуляръ BC на OA; изъ A возставляемъ перпендикуляръ на OA. Тогда очевидно



Фиг. 85.

$$BC=\sin x$$
$$DA=\operatorname{tg}x.$$

Соединимъ B съ A прямою и разсмотримъ ΔOAB, секторъ OAB и ΔOAD. Относительно ихъ площадей замѣчаемъ:

$$\Delta OAB<\triangle OA\overset{\frown}{B}<\Delta OAD.$$

или $\frac{OA\cdot BC}{2}<\frac{OA\cdot\overset{\frown}{AB}}{2}<\frac{OA\cdot DA}{2}$

Сокращая на $\frac{OA}{2}$, получаемъ:

$$CB<\overset{\frown}{AB}<AD.$$

Подставляемъ сюда $CB=\sin x$, $\overset{\frown}{AB}=x$; $DA=\operatorname{tg}x$:

$$\sin x<x<\operatorname{tg}x.$$

Раздѣляя неравенство на $\sin x$, получаемъ:

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\ \text{------}\ (12).$$

Пусть на прямой линіи: $OQ=\frac{x}{\sin x}$, а $OP=\frac{1}{\cos x}$, тогда по неравенству (12), точка Q должна всегда находиться между 1 и

$$\begin{array}{cccc} & & \frac{x}{\sin x} & \frac{1}{\cos x}\\ O & 1. & Q. & P\end{array}$$

Фиг. 86.

P. Если теперь перейти къ предѣлу, т. е. если x

приближается къ нулю, то неравенство принимаетъ видъ: $1 < \lim\limits_{x=0} \frac{x}{\sin x} < \lim\limits_{x=0} \frac{1}{\cos x}$,

$$\text{но} \quad \lim_{x=0} \frac{1}{\cos x} = 1, \text{------} (13).$$

$$\text{отсюда} \quad 1 < \lim_{x=0} \frac{x}{\sin x} < 1.$$

Т.е. если x стремится къ нулю, то P приближается къ точкѣ 1 (изъ (13)). Въ предѣлѣ P совпадаетъ съ 1, но такъ какъ точка Q остается всегда между 1 и P, то и она также совпадаетъ съ 1, т. е.

$$\lim_{x=0} \frac{x}{\sin x} = 1. \text{ ---- } (14).$$

Если приближаться къ нулю со стороны отрицательныхъ x, то вслѣдствіе ур-я $\sin(-x) = -\sin x$, получаемъ тотъ же предѣлъ (14). Изъ ур-я (14) конечно слѣдуетъ, что и

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

а отсюда, по перенесеніи всѣхъ членовъ въ лѣвую часть, находимъ:

$$\lim_{x=0} \frac{x - \sin x}{x} = 0 \text{ ------ } (15).$$

Въ справедливости ур-я (15) легко убѣдиться на частныхъ примѣрахъ. Если уголъ равенъ 4°, то дуга, соотвѣтствующая этому углу есть:

$$\text{arc } 4^\circ = 0{\cdot}06981317.$$

$$\sin 4^\circ = 0{\cdot}06975647.$$

$$\text{отсюда} \quad \frac{\text{arc } 4^\circ - \sin 4^\circ}{\text{arc } 4^\circ} = 0{\cdot}00081217$$

Также находимъ: arc 2° = 0·03[illegible]058

$$\sin 2^\circ = 0{\cdot}03489942.$$

$$\frac{\operatorname{arc} 2^\circ - \sin 2^\circ}{\operatorname{arc} 2^\circ} = 0{\cdot}00020512.$$

$$\operatorname{arc} 1^\circ = 0{\cdot}01745329, \quad \sin 1^\circ = 0{\cdot}01745241.$$

$$\frac{\operatorname{arc} 1^\circ - \sin 1^\circ}{\operatorname{arc} 1^\circ} = 0{\cdot}00005042.$$

$$\operatorname{arc} 30' = 0{\cdot}00872664, \quad \sin 30' = 0{\cdot}00872654.$$

$$\frac{\operatorname{arc} 30' - \sin 30'}{\operatorname{arc} 30'} = 0{\cdot}00001146.$$

$$\operatorname{arc} 15' = 0{\cdot}00436332, \quad \sin 15' = 0{\cdot}00436331.$$

$$\frac{\operatorname{arc} 15' - \sin 15'}{\operatorname{arc} 15'} = 0{\cdot}0000002.$$

Мы видимъ, что съ уменьшенiемъ угла уменьшается и дробь (15) и приближается повидимому къ нулю.

Опредѣленiе $\lim_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

Докажемъ сначала, что если x есть цѣлое положительное число m, то съ увеличенiемъ m это выраженiе все увеличивается, но, вмѣстѣ съ тѣмъ, остается всегда болѣе 2-хъ и менѣе 4-хъ. Для этого воспользуемся извѣстною формулою:

$$\frac{a^{m+1}-b^{m+1}}{a-b} = a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + \ldots + ab^{m-1} + b^m, \quad (16)$$

гдѣ m число цѣлое и положительное.

Положимъ, что a и b суть положительныя числа и что $a > b$; тогда получаемъ слѣдующую систему неравенствъ:

$$a^m = a^m$$

$$a^{m-1}b < a^m.$$

$a^{m-2}b^2 < a^m$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$ Сложивъ неравенства

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

$ab^{m-1} < a^m$ почленно, получаемъ:

$b^m < a^m$

$$a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + \ldots\ldots + ab^{m-1} + b^m < (m+1)a^m \ldots (17).$$

Если теперь вмѣсто первой части ур-iя (16) подставимъ правую часть неравенства (17), то получимъ:

$$\frac{a^{m+1} - b^{m+1}}{a-b} < (m+1)a^m$$

Умножимъ обѣ части на $(a-b)$:

$$a^{m+1} - b^{m+1} < (m+1)(a-b)a^m.$$

$$a^{m+1} - (m+1)(a-b)a^m < b^{m+1}$$

Взявъ за скобки a^m, получимъ:

$$a^m\{a-(m+1)(a-b)\} < b^{m+1} \ldots (18).$$

Итакъ, изъ ур-iя (16) мы получаемъ неравенство (18), но только при условiи:

$$a > b > 0 \text{ --------- } (19)$$

Придадимъ для a и b слѣдующiя частныя значенiя: $a = 1 + \frac{1}{m}$; $b = 1 + \frac{1}{m+1}$ --- (20), гдѣ m цѣлое положительное число.

Легко убѣдиться, что эти значенiя вполнѣ удовлетворяютъ условiю (19). Подставимъ ихъ въ неравенство (18); при этомъ сначала найдемъ, чему будетъ равняться выраженiе въ скобкахъ:

$$a-(m+1)(a-b) = 1 + \frac{1}{m} - (m+1)\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{m} - (m+1)\frac{1}{m(m+1)} = 1.$$

Такимъ образомъ, по подстановкѣ въ (18).

значеній a и b изъ (20), получимъ:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1} \quad \text{-----} \quad (21)$$

Сравнивая это неравенство съ выраженіемъ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, видимъ, что лѣвая и правая часть представляютъ тотъ же видъ и что, слѣдовательно, выраженіе $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ увеличивается, если значеніе n увеличивается. Если придадимъ n частное значеніе $n=1$, то получимъ:

$$\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]_{n=1} = 2.$$

Увеличивая значеніе n найдемъ, что и все выраженіе увеличивается и такимъ образомъ всегда будетъ больше 2-хъ, т. е.

$$2 \leqq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Докажемъ теперь, что при увеличеніи n наше выраженіе всегда остается меньше 4-хъ.

Придадимъ a и b въ неравенствѣ (18) значенія:

$$a = 1+\frac{1}{2m}, \quad b=1 \quad \text{-----} \quad (22).$$

что вполнѣ возможно, ибо при этихъ значеніяхъ не нарушается условіе

$$a > b > 0.$$

Найдемъ опять, чему будетъ равняться выраженіе въ скобкахъ:

$$a-(m+1)(a-b) = 1+\frac{1}{2m}-(m+1)\frac{1}{2m} = \frac{2m+1-m-1}{2m} = \frac{1}{2}.$$

По подстановкѣ значеній (22) a и b въ неравенство (18), получаемъ:

$$\left(1+\frac{1}{2m}\right)^m \cdot \frac{1}{2} < 1.$$

Умножимъ объ части на 2:

$$\left(1+\frac{1}{2m}\right)^m < 2.$$

Возвысивъ въ квадратъ, получаемъ:

$$\left(1+\frac{1}{2m}\right)^{2m} < 4 \text{ --------- } (23).$$

Въ лѣвой части полученнаго неравенства имѣемъ выраженіе вида $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, гдѣ $n=2m$. Неравенство (23) справедливо для произвольнаго значенія n, такъ что выраженіе $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, при логарифмическомъ увеличеніи n увеличивается, но остается постоянно меньше четырехъ.

Теперь докажемъ, что если, начиная съ нѣкотораго значенія n (напр. $n=w$), придавать n рядъ послѣдовательныхъ значеній:

$$w < w_1 < w_2 < w_3 \ldots\ldots$$

то разность между предыдущимъ и послѣдующимъ выраженіемъ можетъ быть сдѣлана меньше произвольно малой величины λ, т. е. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при неограниченномъ увеличеніи n стремится къ нѣкоторому предѣлу. Докажемъ, слѣдовательно, что начиная съ нѣкотораго мѣста $\nu = w$.

$$\left(1+\frac{1}{w_\nu}\right)^{w_\nu} - \left(1+\frac{1}{w_{\nu-1}}\right)^{w_{\nu-1}} < \lambda \text{ --- } (24)$$

Для доказательства положимъ, сначала, что наше выраженіе не стремится къ опредѣленному предѣлу, и что, слѣдовательно, для нѣкотораго произвольно-малаго λ можно, при данномъ w, найти такое w_1 и для найденнаго w_1 такое w_2 и т. д., что

$$\left.\begin{array}{l}\left(1+\frac{1}{w_1}\right)^{w_1}-\left(1+\frac{1}{w}\right)^{w}>\alpha.\\ \left(1+\frac{1}{w_2}\right)^{w_2}-\left(1+\frac{1}{w_1}\right)^{w_1}>\alpha.\\ \left(1+\frac{1}{w_3}\right)^{w_3}-\left(1+\frac{1}{w_2}\right)^{w_2}>\alpha.\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \left(1+\frac{1}{w_\sigma}\right)^{w_\sigma}-\left(1+\frac{1}{w_{\sigma-1}}\right)^{w_{\sigma-1}}>\alpha.\end{array}\right\}\cdots\cdots(25).$$

Складывая эти неравенства, получаемъ:

$$\left(1+\frac{1}{w_\sigma}\right)^{w_\sigma}-\left(1+\frac{1}{w}\right)^{w}>\sigma\alpha\cdots\cdots(26),$$

гдѣ σ произвольное число. Пусть $\sigma \geq \frac{4}{\alpha}$; тогда наша разность будетъ болье 4-хъ. Мы раньше нашли, что наше выраженіе должно быть больше 2-хъ и меньше 4-хъ; поэтому послѣднее неравенство (26) и вслѣдствіе этого и (25) невозможны. Итакъ мы должны допустить, что при увеличеніи w разность между предыдущимъ и послѣдующимъ выраженіемъ можно сдѣлать произвольно малою, т. е. наше выраженіе имѣетъ предѣлъ, который, какъ мы раньше нашли, заключается между 2 и 4. Впослѣдствіи, въ теоріи безконечныхъ рядовъ, мы познакомимся со способомъ вычисленія значенія этого предѣла и увидимъ, что:

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=2{,}7182818\ldots$$

Это число, составляющее основаніе Неперовыхъ логарифмовъ, обозначается буквою e.

Предыдущее доказательство относилось къ

тому случаю, когда n цѣлое положительное число. Теперь спрашивается, приближается ли наша функція къ тому же предѣлу e, если аргументъ принимаетъ всевозможныя значенія.

Если x не равно цѣлому числу, но представляетъ какую-нибудь промежуточную дробь заключающуюся, напр., между цѣлыми числами n и $n+1$; то $n < x < n+1$,

отсюда $\frac{1}{n} > \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1}$.

Прибавляя къ каждой части по единицѣ, получаемъ: $1+\frac{1}{n} > 1+\frac{1}{x} > 1+\frac{1}{n+1}$.

Возвышаемъ неравенство въ степень x.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{x} \quad \text{------} \quad (27).$$

Такъ какъ x заключается между цѣлыми а положительными значеніями n и $n+1$, то, слѣдовательно, $x = n+\alpha$.

$$x = n+1-\beta,$$

гдѣ α и β правильныя положительныя дроби, и $\alpha+\beta=1$. Подставляемъ эти значенія въ неравенство (27):

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1-\beta}.$$

Такъ какъ $(n+\alpha)$ мы можемъ представить въ видѣ $n\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)$, а выраженіе $(n+1-\beta)$ въ видѣ $(n+1)\cdot\left(1-\frac{\beta}{n+1}\right)$, то неравенству можно придать такой видъ:

$$\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{1+\frac{\alpha}{n}} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} > \left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{1-\frac{\beta}{n+1}}.$$

Если перейти къ предѣлу, то получимъ:

$$\lim_{n=\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{1+\frac{\alpha}{n}} > \lim_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \lim\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{1-\frac{\beta}{n+1}}$$

Но при $n=\infty$, имѣемъ: $\frac{\alpha}{n}=0$, $\frac{\alpha}{n+1}=0$, отсюда

$$\lim_{n=\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{1+\frac{\alpha}{n}} = \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

$$\lim_{n=\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{1-\frac{\beta}{n+1}} = \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e.$$

Слѣдовательно, и

$$\lim_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{-----} \quad (28).$$

Итакъ, если x, увеличиваясь, принимаетъ не только значенія, равныя цѣлымъ числамъ, но и произвольныя дробныя, то мы получаемъ тотъ же предѣлъ e.

Непрерывность функцій.

Прежде чѣмъ говорить о непрерывныхъ функціяхъ, скажемъ нѣсколько словъ о непрерывности независимой перемѣнной. Пусть какая-нибудь независимая перемѣнная x отъ значенія x_0 переходитъ къ значенію x_1. Если этотъ переходъ совершается такъ, что x принимаетъ всѣ промежуточныя значенія отъ x_0 до x_1, вслѣдствіе чего каждое послѣдующее x разнится отъ предыдущаго на величину безконечно малую, то говорятъ, что независимая перемѣнная **непрерывна** или измѣняется непрерывно въ промежуткѣ отъ x_0 до x_1. Въ противномъ случаѣ перемѣнную называютъ **прерывною**.

Теперь спрашивается, въ какомъ случаѣ функція наз. прерывною и когда непрерывною.

Пусть дана функція: $y = f(x)$, изображеніемъ которой служитъ нѣкоторая кривая. Возьмемъ на этой кривой точку A, координаты которой суть a и в. Тогда имѣемъ: $в = f(a)$ --(29). т. е. если вмѣсто x-ы подставимъ a, то y будетъ равно в. Прибавимъ къ значенію a отрѣзокъ $BB' = h$; такое прибавленіе къ значеніямъ координатъ называется **приращеніемъ**.

фиг 86.

Если изъ B' возставить перпендикуляръ къ Ox, то въ пересѣченіи съ кривой получимъ нѣкоторую точку A', которой абсцисса суть $a+h$, а ордината $B'A'$; поэтому можно написать: $B'A' = f(a+h)$ ----- (30).

Если провести черезъ A параллель къ Ox, то въ пересѣченіи съ B'A' получимъ точку C'; если разстояніе C'A' назовемъ черезъ k, то получимъ:

$$B'A' = B'C' + C'A' = в + k,$$

k есть количество, на которое измѣнилось значеніе ординаты, если абсцисса измѣнилась на h; иначе — k есть приращеніе ординаты при увеличеніи абсциссы на величину h. Подставляя въ

ур-іе (30) значеніе B'A', получаемъ:

$$b+k=f(a+h) \quad \text{-------------} \quad (31).$$

Ясно, что каждому приращенію абсциссы соотвѣтствуетъ нѣкоторое приращеніе ординаты. Вычитая ур-іе (29) изъ ур-ія (31), получаемъ

$$k=f(a+h)-f(a) \quad \text{------} \quad (32).$$

При помощи этой формулы мы всегда можемъ найти приращеніе ординаты, соотвѣтствующее любому приращенію абсциссы, при чемъ k можетъ быть и положительно, и отрицательно.

Пусть, напр., $y=f(x)=x^2$ $a=2$

тогда $b=f(a)=f(2)=2^2=4$.

Если придать абсциссѣ $a=2$ приращеніе $h=1$, то $b+k=f(a+h)=3^2=9$,

слѣдовательно, $k=f(a+h)-f(a)=9-4=5$.

Т.е., если въ нашемъ примѣрѣ придать абсциссѣ 2 приращеніе, равное 1, то получимъ, что соотвѣтственное приращеніе <u>ординаты</u> равно 5.

Вмѣсто увеличенія, можно было бы уменьшить значеніе абсциссы на величину h; если соотвѣтственное положительное или отрицательное приращеніе b обозначить черезъ k', то

$$b+k'=f(a-h).$$

Вычитая это ур-іе изъ ур-я (29), получаемъ.

$$k'=f(a-h)-f(a).$$

<u>Итакъ каждому положительному или отрицательному приращенію абсциссы</u>

соотвѣтствуетъ нѣкоторое приращеніе ординаты, которое опредѣляется формулами:

$$k = f(a+h) - f(a)$$

$$k' = f(a-h) - f(a).$$

Положимъ теперь, что B'' и B' приближаются къ точкѣ B. Если тогда $A'B'$ и $A''B''$ приближаются къ одному и тому же предѣлу AB, то говорятъ, что функція непрерывна въ точкѣ $x=a$. Иначе говоря, функція $y=f(x)$ называется непрерывною въ точкѣ $x=a$, если для достаточно малаго, какъ положительнаго, такъ и отрицательнаго h, разность $f(a+h)-f(a)$ по абсолютной величинѣ дѣлается меньше произвольно-малой величины ε.

$$|f(a+h) - f(a)| < \varepsilon \text{ ------ } (33)$$

Если для всѣхъ значеній аргумента x отъ x_0 до x_1 соотвѣтственная функція $y=f(x)$ непрерывна, то она называется непрерывною въ промежуткѣ отъ x_0 до x_1.

Если неравенство (33) не имѣетъ мѣста, какъ для положительныхъ, такъ и отрицательныхъ приращеній h, то функція прерывна въ точкѣ $x=a$. Примѣръ такого перерыва изображенъ на фиг. 87, гдѣ ордината $C'B'$ стремится къ предѣлу CB,

Фиг. 87.

и ордината $C''B''$ къ предѣлу CA.

Примѣръ I. Пусть дана функція:

$$y = f(x) = x^2 \text{ - - - - - - - - - - } (34).$$

Если сообщимъ x нѣкоторое приращеніе h, то для y будетъ соотвѣтствовать приращеніе k; отсюда

$$y+k = f(x+h) = (x+h)^2.$$

$$y+k = x^2 + 2xh + h^2.$$

Вычитая изъ этого ур-я ур-іе (34), получаемъ:

$$k = 2xh + h^2.$$

Пусть h по абсолютной величинѣ дѣлается меньше произвольно-малой величины δ.

$$|h| < \delta.$$

Въ такомъ случаѣ, соотвѣтственное приращеніе y всегда будетъ произвольно мало:

$$|k| < \varepsilon,$$

т.е. функція $y = x^2$ непрерывна для всѣхъ значеній аргумента x.

Примѣръ II. $y = f(x) = \frac{1}{x}.$

Если умножить эту лѣвую функцію на x, то получимъ неявную: $xy = 1$, которая представляетъ равностороннюю гиперболу, оси которой совпадаютъ съ осями координатъ.

(Ф.110) Изъ этого уже видно, что въ точкѣ $x=0$ происходитъ перерывъ непрерывности. Въ са=

Фиг. 110.

можно дѣлать:

$$k = f(x+h) - f(x) = \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = \frac{x-x-h}{x(x+h)} = \frac{-h}{x^2+xh}$$

Пусть h будетъ произвольно мало: $|h| < \delta$; тогда числитель нашего выраженія произвольно малъ. Если x не равно нулю: $x \gtrless 0$, ------- (35). то x^2 есть величина конечная, а xh произвольно малая, т. е. знаменатель величина конечная; Отсюда k — произвольно мало: $k < \varepsilon$. Итакъ, при условіи (35), наша функція непрерывна. Пусть теперь x приближается къ нулю, тогда x^2 дѣлается безконечно-малою величиною второго порядка, такъ же, какъ и xh; поэтому k будетъ безконечно велико. Итакъ, если x приближается къ нулю, то каждому произвольно-малому приращенію его h соотвѣтствуетъ безконечно-большое приращеніе y, т. е. функція прерывна въ точкѣ $x = 0$.

Примѣръ III. И эмпирическія функціи бываютъ иногда прерывны. Извѣстно, напримѣръ, что отъ нагрѣванія объемъ тѣлъ увеличивается. Слѣдовательно, объемъ v тѣла есть функція его температуры t. Эта функція непрерывна до точки плавленія τ тѣла.

v

t

Фиг. 89.

Теперь, если увеличить температуру на произвольно-малую долю градуса, то тѣло плавится

и въ измѣненіи объема происходитъ скачекъ. Увеличивая далѣе температуру, получаемъ снова непрерывную функцію.

О производной.

Приращенія h и k обозначаютъ символически:

$$h = \Delta x; \quad k = \Delta y.$$

Такимъ образомъ, если дана функція $y = f(x)$, то ур-іе (~~32~~ 204) принимаетъ видъ:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \quad \text{.......} \quad (36).$$

Если приращеніе Δx дѣлается безконечно-малымъ то оно обозначается черезъ dx и называется **дифференціаломъ** x.

Въ случаѣ непрерывной функціи безконечно малому Δx соотвѣтствуетъ безконечно-малое Δy, которое обозначается черезъ dy. Такъ что

$$dx = \lim(\Delta x).$$

$$dy = \lim(\Delta y).$$

Раздѣлимъ ур-іе (36) на Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Если это отношеніе, при безконечномъ уменьшеніи Δx, стремится къ нѣкоторому опредѣленному предѣлу, то этотъ предѣлъ будетъ:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

и называется <u>дифференціальнымъ отношеніемъ</u> данной функціи

Примѣръ. Найдемъ дифференціальное отношеніе функціи $y = f(x) = x^2$.
По предыдущей формулѣ находимъ:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x = 0} (2x + \Delta x).$$

При безконечномъ уменьшеніи Δx, предѣлъ этотъ равенъ $2x$: $\frac{dy}{dx} = 2x$.

Мы видимъ, что дифференціальное отношеніе есть также функція отъ x, поэтому оно называется еще иначе — производною данной функціи. Эту производную обозначаютъ различными символами:

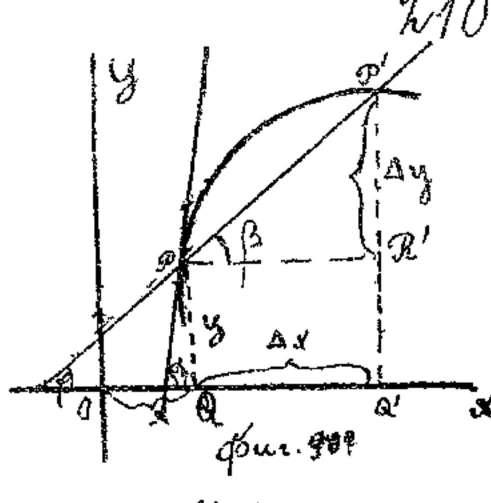
$$\frac{dy}{dx}; \quad \frac{d f(x)}{dx}; \quad \frac{d}{dx} f(x); \quad f'(x); \quad y'.$$

Существуютъ еще другія обозначенія, но это самыя употребительныя. Такъ какъ всѣ эти выраженія обозначаютъ одно и то же, то можно написать: $\frac{dy}{dx} = f'(x)$.

Отсюда: $dy = f'(x)\,dx$. ------ (37).

Это выраженіе позволяетъ перейти отъ производной функціи къ дифференціалу функціи и наоборотъ.

Разсмотримъ геометрическое значеніе производной. Пусть изображеніемъ функціи $y = f(x)$ служитъ нѣкоторая кривая. Возьмемъ на ней точку $P(x, y)$. Придадимъ x прираще-



Фиг. 99

ніе Δx (пока конечное). Возставивъ изъ полученной точки Q' перпендикуляръ къ Ox, получаемъ въ пересѣченіи съ кривою точку P'. Если обозначимъ ординату, соотвѣтствующую абсциссѣ $x+\Delta x$, черезъ $y+\Delta y$, то получимъ:

$$y+\Delta y = Q'P' = f(x+\Delta x)$$

Проведя черезъ P параллель PR' къ оси Ox, замѣчаемъ:

$$R'P' = \Delta y.$$
$$PR' = QQ' = \Delta x.$$

Соединимъ теперь P съ P' прямою линіей, и пусть она образуетъ съ положительною частью оси Xовъ уголъ $\beta = \angle R'PP'$. Тогда

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{R'P'}{PR'} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{----} \quad (38).$$

Намъ извѣстно, что каждое измѣненіе Δx вызываетъ соотвѣтственное измѣненіе въ Δy. Положимъ, что Δx все уменьшается, т. е. точка Q' приближается къ точкѣ Q; тогда P' приближается къ P и когда Δx дѣлается безконечно-малымъ, то точки P и P' становятся безконечно близкими. Въ этомъ случаѣ сѣкущая PP' переходитъ въ касательную точки P. Пусть эта касательная заключаетъ съ Ox уголъ α. Этотъ уголъ есть предѣлъ угла β при переходѣ сѣкущей PP' въ касательную: $\angle\alpha = \lim \angle\beta$.

Отсюда $\operatorname{tg}\alpha = \lim \operatorname{tg}\beta$

или принимая во вниманіе ур-іе (38),

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

т. е. $\operatorname{tg}\alpha$ есть предѣлъ, къ которому стремится $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при приближеніи Δx къ нулю; а этотъ предѣлъ есть ни что иное, какъ дифференціальное отношеніе

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}.$$

Каждой непрерывной функціи $y=f(x)$ соотвѣтствуетъ нѣкоторая производная $y'=f'(x)$. Если для x придать частное значеніе, напр. $x=a$

$$b=f(a),$$

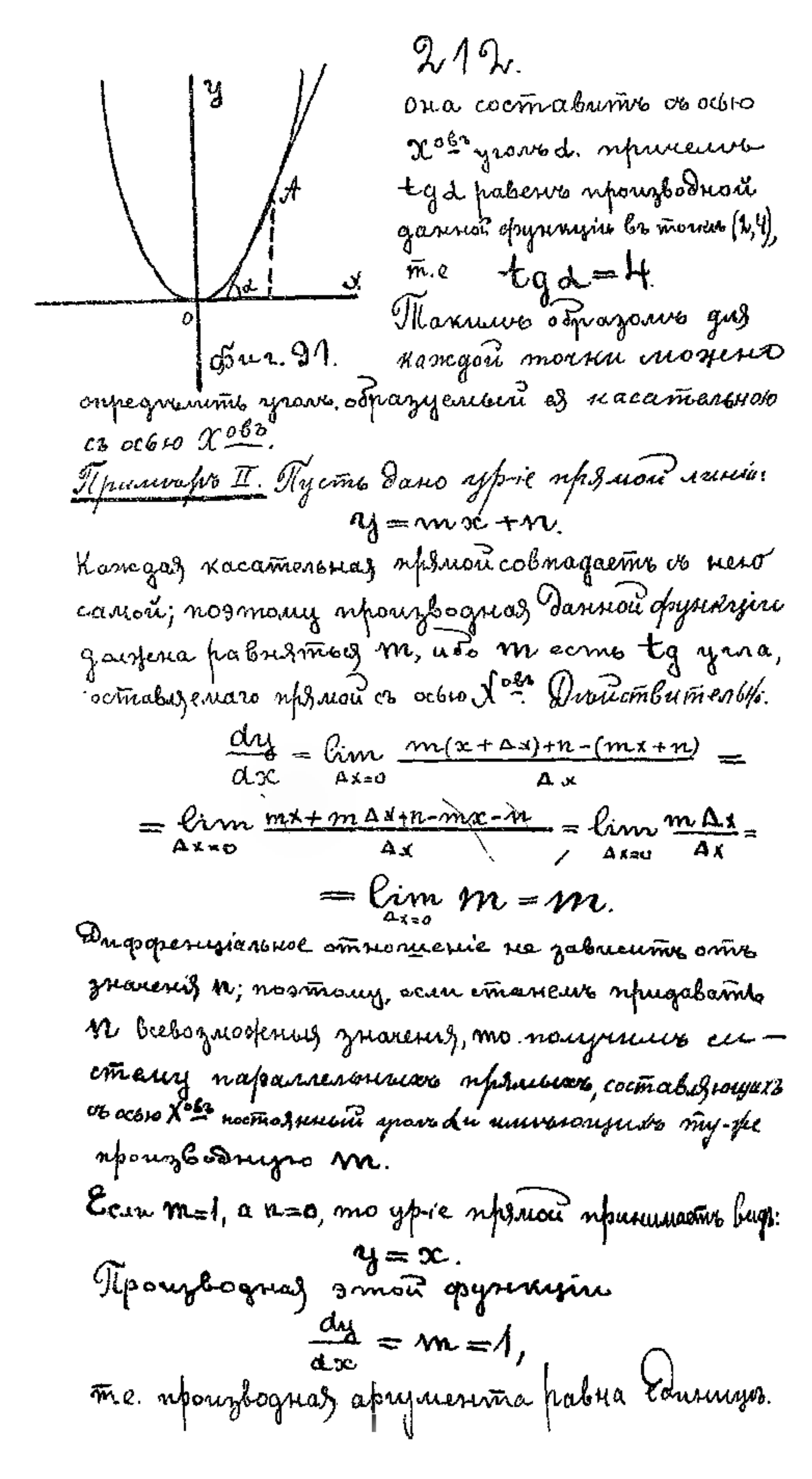
то производная получаетъ опредѣленное частное значеніе $b'=f'(a)$.

Примѣръ I. Пусть требуется найти производную функціи $y=f(x)=x^2$.

Для частнаго значенія $x=2$, получимъ $y=4$. Мы уже раньше нашли (стр 209), что дифференціальное отношеніе или производная этой функціи равна $2x$ Для частнаго значенія $x=2$, находимъ:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2} = (2x)_{x=2} = 4.$$

Намъ извѣстно, что ур-іе $y=f(x)=x^2$ изображаетъ параболу, ось которой совпадаетъ съ осью Y овъ. Точкѣ, абсциссъ которой $x=2$, соотвѣтствуетъ ордината $y=4$. Если въ точкѣ (2, 4) провести касательную то



Фиг. 91.

она составитъ съ осью $X^{овъ}$ уголъ α, причемъ $tg\,\alpha$ равенъ производной данной функціи въ точкѣ (2,4), т.е. $tg\,\alpha = 4$.

Такимъ образомъ для каждой точки можно опредѣлить уголъ, образуемый ея касательною съ осью $X^{овъ}$.

Примѣръ II. Пусть дано ур-іе прямой линіи:

$$y = mx + n.$$

Каждая касательная прямой совпадаетъ съ нею самой; поэтому производная данной функціи должна равняться m, ибо m есть tg угла, составляемаго прямой съ осью $X^{овъ}$. Дѣйствительно:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{m(x+\Delta x)+n-(mx+n)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x = 0} \frac{mx + m\Delta x + n - mx - n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{m\Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x = 0} m = m.$$

Диференціальное отношеніе не зависитъ отъ значенія n; поэтому, если станемъ придавать n всевозможныя значенія, то получимъ систему параллельныхъ прямыхъ, составляющихъ съ осью $X^{овъ}$ постоянный уголъ α и имѣющихъ ту-же производную m.

Если $m=1$, а $n=0$, то ур-іе прямой принимаетъ видъ:

$$y = x.$$

Производная этой функціи

$$\frac{dy}{dx} = m = 1,$$

т.е. производная аргумента равна единицѣ.

Фиг. 91.

Прямая $y=x$ проходитъ черезъ начало координатъ и составляетъ съ осью $X^{овъ}$ уголъ въ 45°, и мы имѣемъ въ самомъ дѣлѣ $tg 45° = 1$. Пусть теперь $m=0$; тогда ур-іе принимаетъ видъ:

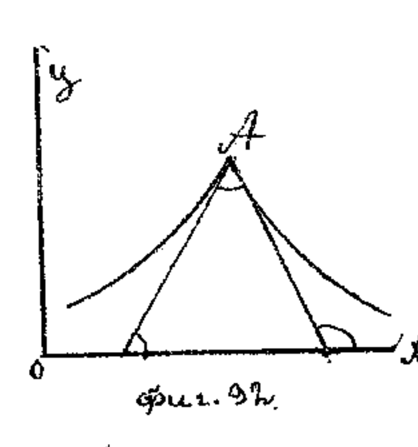
$$y = n.$$

Соотвѣтственное значеніе производной будетъ

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

т. е. производная постоянной величины равна нулю. Извѣстно, что ур-іе $y=n$ изображаетъ прямую, параллельную оси $X^{овъ}$ на разстояніи n отъ нея. Уголъ прямой съ осью $X^{овъ}$ равенъ нулю. Это вполнѣ соотвѣтствуетъ нашему выводу, ибо $tg 0° = 0$.

Мы раньше нашли, что дифференціальное отношеніе есть также функція отъ x, которая, конечно, можетъ быть прерывна или непрерывна. Мы видѣли также, что примѣръ прерывной функціи представляетъ кривая, гдѣ ордината дѣлаетъ скачекъ. Посмотримъ теперь, какой видъ будетъ имѣть кривая, если изображаемая ею функція непрерывна, но производная этой функціи прерывна въ какой-нибудь точкѣ A, т. е. дифференціальное отношеніе измѣняется на конечную величину. Въ такомъ случаѣ, очевидно, уголъ между касательною и Ox измѣняется также на конеч-



Фиг. 92.

мую величину, вследствіе чего кривая имѣетъ переломъ (ф. 92). Производная имѣетъ важное значеніе не только въ геометріи, но также и въ механикѣ, напр., для опредѣленія скорости неравномѣрно-движущагося тѣла въ каждый данный моментъ. Пусть точка P движется равномѣрно по прямой l и пусть эта точка начинаетъ свое движеніе въ точкѣ A, т.-е. (называя промежутки времени черезъ t, а соотвѣтственные пути черезъ s) при $t=0$ наша точка находится въ A. Такъ какъ разсматриваемое движеніе равномѣрное, то если въ промежутокъ времени $t=1$ точка прошла разстояніе a, то при $t=2$ она пройдетъ $s=2a$; при $t=3$ — $s=3a$ и т. д.; наконецъ въ t_0 она пройдетъ нѣкоторое пространство s_0:

$$s_0 = at_0.$$

Фиг. 93

Пусть въ промежутокъ времени t_1 точка прошла пространство s_1, тогда

$$s_1 = at_1.$$

Вычитая первое ур-іе изъ второго, получимъ:

$$s_1 - s_0 = a(t_1 - t_0).$$

отсюда $\frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = a.$

Т. е. отношение пройденнаго пути (отъ P_0 до P_1) къ употребленному на это времени (отъ t_0 до t_1) равно постоянной величинѣ a, которая называется скоростью движенія.

Теперь спрашивается, какъ опредѣлить скорость въ случаѣ неравномѣрнаго движенія. Пусть однако намъ извѣстенъ законъ этого движенія, выражаемый какимъ-нибудь ур-ніемъ

$$s = f(t);$$

тогда для каждаго значенія t можно найти соотвѣтственное значеніе s.

Положимъ, что при движеніи нашей точки отъ P_0 до P_1 отношеніе этого пути къ потраченному времени равно нѣкоторой величинѣ a: $\frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = a$ ------ (39).

Тогда намъ извѣстно, что въ другомъ промежуткѣ это отношеніе будетъ уже иное. Пусть нѣкоторая другая точка Q движется равномѣрно по той-же прямой l со скоростью a и въ моментъ t_0 находится въ точкѣ Q_0, совпадающей съ P_0. Въ промежуткѣ времени отъ t_0 до t_1 она пройдетъ пространство:

$$Q_0Q_1 = a(t_1 - t_0),$$

но по ур-нію (39) эта величина равна $s_1 - s_0 = P_0P_1$, т. е. если Q_0 совпадаетъ съ P_0, то Q_1 совпадаетъ съ P_1. Скорость этой равномѣрно-движущейся точки Q называется <u>среднею</u>

скоростью точки P въ промежуткѣ P_0P_1. Но намъ нужно опредѣлить скорость точки P въ данный моментъ. Пусть эта точка, двигаясь по прямой l, занимаетъ на ней послѣдовательно положенія P_0, P_1, P_2, P_3, ... Допустимъ, что эта вспомогательная точка Q проходитъ черезъ P_0, а также и черезъ P_1 и т. д. въ тѣ же моменты, что и точка P, но внутри означенныхъ отрѣзковъ движется равномѣрно, причемъ движенія этой вспомогательной

P_0 P_1 P_2 P_3

Фиг. 94.

точки, конечно, разнится отъ движенія точки P. Чѣмъ болѣе уменьшаются отрѣзки P_0P_1, P_1P_2 и т. д., тѣмъ эта разница дѣлается незначительнѣе, и когда эти отрѣзки дѣлаются безконечно малыми, то и движенія обѣихъ точекъ безконечно-мало отличаются другъ отъ друга. Если обозначимъ пространство P_0P_1 черезъ Δs, а соотвѣтственный ему промежутокъ времени черезъ Δt, то $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ будетъ среднею скоростью точки P въ промежуткѣ отъ P_0 до P_1. Предѣлъ, къ которому приближается эта средняя скорость, при неограниченномъ уменьшеніи отрѣзковъ, наз. тогда скоростью v точки P въ данный моментъ

$$v = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Итакъ, скоростью въ данный моментъ неравномѣрно движущейся точки наз. отношеніе безконечно-малаго пройден=

наго пространства къ соотвѣтственному безконечно-малому промежутку времени. Это отношеніе, конечно, есть ни что иное, какъ дифференціальное отношеніе. Итакъ, если движеніе выражается формулой:

$$s = f(t),$$

то производная этой функціи даетъ намъ скорость этого движенія.

Такъ напр., законъ паденія тѣла въ безвоздушномъ пространствѣ, выражается:

$$s = \frac{gt^2}{2}.$$

Чтобы найти скорость падающаго тѣла въ данный моментъ, стоитъ лишь найти производную данной функціи:

$$v = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\frac{g}{2}(t+\Delta t)^2 - \frac{gt^2}{2}}{\Delta t} =$$

$$= \frac{g}{2} \lim_{\Delta t = 0} \frac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = \frac{g}{2} \cdot 2t = gt.$$

Итакъ, скорость падающаго тѣла въ данный моментъ t есть:

$$v = gt.$$

Общія теоремы о производныхъ.

Производная степени.

Дѣйствіе, съ помощью котораго по данной функціи находится ея производная, называется **дифференцированіемъ** и составляетъ основную задачу дифференціальнаго исчисленія.

Мы раньше нашли (стр. 213), что произ=

водная постоянной величины равна нулю; это выражается следующею формулою:

$$\frac{dc}{dx}=0 \text{ - - - - - - - - - - I.}$$

Кромѣ того, мы доказали (стр. 212), что производная аргумента равна единицѣ, или

$$\frac{dx}{dx}=1. \text{ - - - - - - - - II.}$$

Найдемъ теперь производную суммы и разности двухъ функцій. Пусть нѣкоторая функція разложена на сумму или разность двухъ функцій:

$$f(x)=u(x)\pm v(x).$$

На стр 208 мы нашли, что если $y=f(x)$, то

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=\lim_{\Delta x=0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \text{ - - - - - (40).}$$

На основаніи этого ур-ія легко найти производную нашей функціи:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x=0}\frac{[u(x+\Delta x)\pm v(x+\Delta x)]-[u(x)\pm v(x)]}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x=0}\left\{\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\pm\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right\}$$

Но предѣлъ суммы или разности равенъ суммѣ или разности предѣловъ, слѣдовательно:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x=0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x=0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$

Первое слагаемое есть ни что иное, какъ производная функціи $u(x)$; второе слагаемое есть производная функціи $v(x)$. Значитъ

$$f'(x)=u'(x)\pm v'(x).$$

т. е: производная суммы или разности двухъ функцій равняется суммѣ или разности производныхъ тѣхъ же функцій.

Опуская обозначеніе аргумента, это можно выразить такъ

$$\frac{d(u \pm v)}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

Конечно, эту теорему можно распространить на произвольное, но конечное число слагаемыхъ; тогда теорема выразится такъ:

Производная алгебраической суммы функцій, равна алгебраической суммѣ производныхъ этихъ функцій. Соотвѣтственная формула будетъ:

$$\frac{d(u+v+\dots+t)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \dots + \frac{dt}{dx} \quad \dots III$$

Найдемъ теперь производную произведенія двухъ функцій. Пусть данная функція равна произведенію двухъ другихъ функцій того-же аргумента:

$$y = u(x) \cdot v(x)$$

Для нахожденія производной воспользуемся пріемомъ (Но):

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x)\, v(x)}{\Delta x}.$$

Значеніе числителя не измѣнится, если къ нему прибавить и вычесть одно и то же количество: $u(x)v(x+\Delta x)$:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x+\Delta x) + u(x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x}.$$

Полученную дробь можно разложить на двѣ.

слагаемыхъ; но предѣлъ суммы равенъ суммѣ предѣловъ; вынеся, кромѣ того, за скобки въ первомъ слагаемомъ $v(x+\Delta x)$, во второмъ $u(x)$, получаемъ:

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x=0}\left\{v(x+\Delta x)\left[\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\right]\right\}+\lim_{\Delta x=0}\left\{u(x)\left[\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right]\right\}.$$

Предѣлъ произведенія равенъ произведенію предѣловъ множителей; но въ первомъ слагаемомъ предѣлъ перваго множителя равенъ $v(x)$, а предѣлъ второго множителя есть производная функціи $u(x)$; во второмъ слагаемомъ предѣлъ второго множителя есть производная отъ $v(x)$. Слѣдоват.,

$$\frac{dy}{dx}=v(x)\,\frac{du(x)}{dx}+u(x)\,\frac{dv(x)}{dx},$$

т. е. производная произведенія равна первому множителю, умноженному на производную второго, плюсъ второй множитель, умноженный на производную перваго:

$$\frac{d(u.v)}{dx}=v\,\frac{du}{dx}+u\,\frac{dv}{dx}\;.....\;IV.$$

Эту формулу можно распространить для произвольнаго числа множителей. Пусть сначала y равняется произведенію трехъ множителей.

$$y=u.t.s.$$

Такъ какъ u, t, s суть функціи отъ x, то и произведеніе $ts=v$ также есть функція отъ x, поэтому можно написать:

$$y=u\,v$$

Какъ найти производную этого произ=

веденія мы знаемъ:

$$\frac{dy}{dx}=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}.$$

Подставляя вмѣсто v его значеніе, получаемъ:

$$\frac{dy}{dx}=t\cdot s\frac{du}{dx}+u\frac{d(t\cdot s)}{dx},$$

но $\frac{d(ts)}{dx}$ есть опять производная произведенія двухъ множителей, поэтому

$$\frac{dy}{dx}=ts\frac{du}{dx}+u\left(s\frac{dt}{dx}+t\frac{ds}{dx}\right)=ts\frac{du}{dx}+us\frac{dt}{dx}+ut\frac{ds}{dx}.$$

Эта формула даетъ намъ законъ для отысканія производной произведенія любого числа множителей. Производная получится если производную каждаго множителя умножить на остальныхъ множителей и сложить полученныя такимъ образомъ произведенія:

$$\frac{d(u_1u_2u_3\ldots u_n)}{dx}=u_2u_3\ldots u_n\frac{du_1}{dx}+u_1u_3u_4\ldots u_n\frac{du_2}{dx}+\ldots$$
$$\ldots+u_1u_2u_3\ldots u_{n-1}\frac{du_n}{dx}\;\text{------}\;\underline{\mathrm{V}}.$$

Этою формулою можно воспользоваться для вычисленія производной степени съ цѣлымъ положительнымъ показателемъ.

Пусть дана функція, которая равна другой функціи, возвышенной въ нѣкоторую степень:

$$y=u^n,$$

гдѣ n цѣлое положительное число. Эту функцію можно представить въ видѣ:

$$y=u\,u\,u\ldots\ldots u\;[\text{всего } n \text{ множителей}].$$

По формулѣ V находимъ:

$$\frac{d(u^n)}{dx} = u^{n-1}\frac{du}{dx} + u^{n-1}\frac{du}{dx} + \dots u^{n-1}\frac{du}{dx} = n\cdot u^{n-1}\frac{du}{dx}.$$

Т. е. чтобы получить производную степени, надо показателя степени умножить на основаніе съ показателемъ, уменьшеннымъ на единицу, и на производную основанія степени.

$$\frac{d(u^n)}{dx} = n\cdot u^{n-1}\frac{du}{dx} \text{ - - - } VI.$$

Если $u = x$, то $\frac{du}{dx} = 1$, отсюда

$$\frac{dx^n}{dx} = n x^{n-1} \text{ - - - - - - } VII.$$

Формулою IV можно воспользоваться для вычисленія производной и въ томъ случаѣ, если одинъ изъ множителей есть величина постоянная. Пусть данная функція равна другой, умноженной на нѣкоторое постоянное количество:

$$y = cu.$$

По формулѣ IV имѣемъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(cu)}{dx} = c\frac{du}{dx} + u\frac{dc}{dx}.$$

Но по формулѣ I, $\frac{dc}{dx} = 0$, такъ что

$$\frac{d(cu)}{dx} = c\frac{du}{dx} \text{ - - - - - - } VIII$$

т. е. постояннаго множителя можно вынести за знакъ дифференцированія.

Съ помощью этихъ восьми формулъ мы въ состояніи опредѣлить производную всѣхъ цѣлыхъ раціональныхъ функцій.

Примѣръ I.

$$y=\frac{x^5}{5}+4x^3-6x^2+7.$$

Такъ какъ по формулѣ III производная суммы функцій равна суммѣ производныхъ этихъ функцій, то мы имѣемъ:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^5}{5}\right)+\frac{d(4x^3)}{dx}-\frac{d(6x^2)}{x}+\frac{d\,7}{dx}.$$

Вынося постоянныхъ множителей за знакъ дифференцированія и замѣчая, что по формулѣ I производная постояннаго количества равна нулю, получимъ:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{5}\frac{d(x^5)}{dx}+4\frac{d(x^3)}{dx}-6\frac{d(x^2)}{dx}$$

Наконецъ, на основаніи формулы VII, находимъ:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{5}\cdot 5x^4+4\cdot 3x^2-6\,2x=x^4+12x^2-12x.$$

Примѣръ II. $y=(a-x)(a+x)(a^2+x^2)$.

Изъ формулы V находимъ:

$$\frac{dy}{dx}=(a+x)(a^2+x^2)\frac{d(a-x)}{dx}+(a-x)(a^2+x^2)\frac{d(a+x)}{dx}+$$
$$+(a-x)(a+x)\frac{d(a^2+x^2)}{dx}=(a^3+a^2x+ax^2+x^3)\cdot\left(\frac{da}{dx}-\right.$$
$$\left.-\frac{dx}{dx}\right)+(a^3-a^2x+ax^2-x^3)\cdot\left(\frac{da}{dx}+\frac{dx}{dx}\right)+$$
$$+(a^2-x^2)\left(\frac{d(a^2)}{dx}+\frac{d(x^2)}{dx}\right)$$

Но $\frac{da}{dx}=0$ и $\frac{da^2}{dx}=0$, какъ производныя постоянныхъ величинъ; $\frac{dx}{dx}=1$, какъ производная аргумента; $\frac{d(x^2)}{dx}=2x$, по формулѣ VII.

Поэтому:

$$\frac{dy}{dx}=-a^3-a^2x-ax^2-x^3+a^3-a^2x+ax^2-x^3+(a^2-x^2)2x=$$

$$= -2a^2x - 2x^3 + 2a^2x - 2x^3 = -4x^3.$$

Можно было бы сначала раскрыть скобки, а потомъ дифференцировать:

$$y = (a^2 - x^2)(a^2 + x^2) = a^4 - x^4;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(a^4)}{dx} - \frac{d(x^4)}{dx}; \text{ но } \frac{d(a^4)}{dx} = 0,$$

Слѣдовательно: $\frac{dy}{dx} = -4x^3$.

Найдемъ теперь производную частнаго двухъ функцій. Пусть дано.

$$y = \frac{u(x)}{v(x)}$$

Для отысканія производной воспользуемся опять формулою (IV).

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \lim \frac{u(x+\Delta x)v(x) - v(x+\Delta x)u(x)}{v(x+\Delta x)\, v(x)\, \Delta x}$$

Вычтемъ и прибавимъ въ числитель $u(x)v(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{1}{v(x+\Delta x)\, v(x)} \cdot \frac{u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x) - v(x+\Delta x)u(x) + u(x)v(x)}{\Delta x}$$

Предѣлъ $v(x+\Delta x)$ равенъ $v(x)$; кромѣ того полученную дробь можемъ представить въ видѣ двухъ дробей:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{[v(x)]^2}\left[\lim_{\Delta x = 0}\left\{v(x)\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}\right\} - \lim_{\Delta x = 0}\left\{u(x)\frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}\right\}\right] =$$

$$= \frac{1}{[v(x)]^2}\left[v(x)\frac{d\,u(x)}{dx} - u(x)\frac{d\,v(x)}{dx}\right].$$

Отсюда получаемъ формулу:

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2} \quad \text{- - - - - } \underline{IX}.$$

Если въ формулѣ $\underline{IX}$ положимъ частный случай $u=1$, то получимъ:

$$\frac{d\frac{1}{v}}{dx} = \frac{v.0 - 1\cdot\frac{dv}{dx}}{v^2} = -\frac{\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Но $\frac{1}{v}=v^{-1}$. Подставляя это значеніе, получаемъ:

$$\frac{d(v^{-1})}{dx}=-v^{-2}\frac{dv}{dx}=-1\,v^{-1-1}\frac{dv}{dx}.$$

Сравнивая полученную формулу съ формулою IV, замѣчаемъ, что послѣдняя справедлива и въ томъ случаѣ, когда $n=-1$. Докажемъ, что она справедлива и тогда, когда n есть произвольное отрицательное, но цѣлое число.

Пусть $y=u^{-n}$,

гдѣ n цѣлое положительное число; тогда $-n$ цѣлое отрицательное. Можно написать:

$$y=\frac{1}{u^n}=\left(\frac{1}{u}\right)^n=v^n, \text{ гдѣ } v=\frac{1}{u}.$$

Чтобы найти производную v^n, можемъ воспользоваться тою формулою II, которая доказана для n цѣлаго и положительнаго

$$\frac{dy}{dx}=n\,v^{n-1}\frac{dv}{dx}.$$

Подставляемъ сюда вмѣсто v его значеніе $\frac{1}{u}$,

$$\frac{dy}{dx}=n\left(\frac{1}{u}\right)^{n-1}\frac{d\frac{1}{u}}{dx}=n\cdot u^{-n+1}\left(-\frac{\frac{du}{dx}}{u^2}\right)=-n\cdot u^{-n-1}\frac{du}{dx}$$

Сравнивая полученное выраженіе съ формулою II, убѣждаемся, что она (а также и формула IV) справедлива, когда n какое-нибудь цѣлое отрицательное число.

Докажемъ, наконецъ, что она дѣйствительна и, когда n есть число дробное. Предварительно докажемъ ея дѣйствительность для того случая, когда показатель имѣетъ видъ $\frac{1}{n}$, гдѣ n цѣлое число. Пусть дано

$$y=\sqrt[n]{u} \text{ или } y=u^{\frac{1}{n}}.$$

Возведя функцію въ $n^{\text{ую}}$ степень, получимъ

$$y^n=u.$$

Такъ какъ обѣ части этого равенства обозначаютъ одну и ту же функцію отъ x, то, конечно, производная лѣвой части равна производной правой части. Поэтому дифференцируемъ по формулѣ $\overline{VI}$:

$$ny^{n-1}\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}$$

Отсюда: $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{ny^{n-1}}\cdot\frac{du}{dx}$;

но $y^{n-1}=(u^{\frac{1}{n}})^{n-1}=u^{\frac{n-1}{n}}=u^{1-\frac{1}{n}}$. Подставляемъ это значеніе

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{n\,u^{1-\frac{1}{n}}}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}\frac{du}{dx}$$

Мы видимъ, что правую часть нашего ур-ія можно было-бы получить, подставивъ въ формулу $\overline{VI}$ $\frac{1}{n}$ вмѣсто n; значитъ она дѣйствительна если показатель имѣетъ видъ $\frac{1}{n}$.

Остается доказать справедливость нашей формулы, если показатель какое-нибудь дробное число. Положимъ, намъ дана функція $y=u^{\frac{m}{p}}$, гдѣ m и p цѣлыя числа. Можно данную функцію представить въ такомъ видѣ $y=(u^m)^{\frac{1}{p}}$, а обозначая $u^m=v$, получимъ $y=v^{\frac{1}{p}}$. Мы доказали, что такая функція дифференцируется по формулѣ $\overline{VI}$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{p}v^{\frac{1}{p}-1}\frac{dv}{dx}.$$

Подставляемъ вмѣсто v его значеніе.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{p}\left(u^m\right)^{\frac{1}{p}-1}\cdot\frac{d(u^m)}{dx}=\frac{1}{p}u^{\frac{m}{p}-m}\cdot mu^{m-1}\frac{du}{dx}=\frac{m}{n}u^{\frac{m}{n}-1}\frac{du}{dx}.$$

Мы получили ту же формулу VI. Такимъ образомъ мы видимъ, что формула VI справедлива для всякаго раціональнаго значенія n. Впослѣдствіи мы познакомимся съ доказательствомъ ея справедливости n для ирраціональнаго значенія n.

Если намъ дана функція $y=u^n$, гдѣ u есть функція отъ x, то мы можемъ сказать, что y есть функція отъ функціи отъ x. Относительно такихъ функцій существуетъ нѣкоторая общая теорема.

Пусть дано: $y=f(u)$, гдѣ $u=\varphi(x)$.

Подставляя значеніе u въ перво ур-іе, получимъ:

$$y=f(\varphi(x)).$$

Опредѣлимъ значеніе производной для такой функціи. Дифференцируя ее по формулѣ (40), стр. 218 получимъ: $\frac{dy}{dx}=\lim\limits_{\Delta x=0}\frac{f(\varphi(x+\Delta x))-f(\varphi(x))}{\Delta x}$

Умножимъ числителя и знаменателя на $\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)$.

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x=0}\frac{f(\varphi(x+\Delta x))-f(\varphi(x))}{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}\cdot\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}.$$

Если $\varphi(x)=u$, то $\varphi(x+\Delta x)=u+\Delta u$, отсюда $\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)=\Delta u$.

По подстановкѣ этихъ значеній получимъ:

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x=0}\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\cdot\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}$$

Предълъ произведенія равенъ произведенію предъловъ множителей. Предълъ перваго множителя равенъ производной функціи $f(u)$, а предълъ второго множителя равенъ производной $\varphi(x)$; слѣдовательно:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx}$$

Подставляя въ первомъ множителѣ $\varphi(x)$ вмѣсто u, или во второмъ u вмѣсто $\varphi(x)$, получаемъ слѣдующіе два вида этой важной теоремы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{df(\varphi(x))}{dx} &= \frac{df(\varphi(x))}{d\varphi(x)} \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} \\ \frac{df(u)}{dx} &= \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}. \end{aligned}\right\} \cdots X.$$

Т.е. при дифференцированіи функціи f отъ функціи u отъ x, слѣдуетъ дифференцировать функцію f по внутренней функціи u, и эту производную умножить на производную внутренней функціи u по x.

Пусть дана функція: $y = f(x)$ --- (41)
и пусть функція $x = \varphi(y)$ --- (42).
будетъ обратная функція (41). Докажемъ, что

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

Если намъ удастся это доказать, то можно будетъ легко по производной данной функціи найти производную обратной функціи.

Придадимъ аргументу въ ур-іи (41) приращеніе Δx, соотвѣтственное ему приращеніе функціи будетъ: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.

Придадимъ теперь аргументу обратной функціи только что опредѣленное приращеніе Δy. Называя соотвѣтственное ему приращеніе функціи черезъ Δ'x, въ отличіе отъ Δx, получимъ:

$$\Delta' x = \varphi(y+\Delta y) - \varphi(y)$$

Производная функціи (41) есть:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

а производная функціи (42):

$$\varphi'(y) = \lim_{\Delta y = 0} \frac{\Delta' x}{\Delta y}$$

Значитъ намъ слѣдуетъ доказать, что

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y = 0} \frac{\Delta' x}{\Delta y}}$$

Приведемъ это выраженіе къ цѣлому виду:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta y = 0} \frac{\Delta' x}{\Delta y} = 1.$$

Замѣчая, что при непрерывности функціи, если Δx приближается къ нулю, то и Δy приближается къ нулю, получимъ:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta' x}{\Delta y} = 1.$$

Сокращая на Δy, получаемъ:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta' x}{\Delta x} = 1.$$

Итакъ, наша теорема будетъ доказана, если докажемъ справедливость послѣдняго ур-ія. Послѣднее легко будетъ доказать, если изобразить нашу функцію графически. Возьмемъ на изображеніи нашей функціи точку P. Тогда QP = f(x).

Придадимъ абсциссѣ OQ = x приращеніе Δx =

$= OQ'$.
Тогда $Q'P' = f(x + \Delta x)$.
Если черезъ P проведемъ параллель къ оси OX, то получимъ:
$SP' = Q'P' - QP = f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta y$.
Слѣдовательно, $RP = OQ = x = \varphi(y)$.
и $R'P' = \varphi(OR') = \varphi(OR + RR') = \varphi(OR + SP') = \varphi(y + \Delta y)$.

Фиг. 95.

Продолжая PQ до пересѣченія съ $R'P'$, получимъ:

$$TP' = R'P' - R'T = R'P' - RP = \varphi(y+\Delta y) - \varphi(y) = \Delta' x.$$

Изъ чертежа видно, что $\Delta' x = \Delta x$.

Значитъ $\frac{\Delta' x}{\Delta x} = 1$, что и требовалось доказать.

Итакъ, $f'(x) = \frac{1}{\varphi'(x)}$ ---- $\overline{XI}$.

Такъ какъ $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, а $\varphi'(x) = \frac{dx}{dy}$, то можемъ написать: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ ------ $\overline{XI}'$

Примѣръ: $y = \sqrt{x}$.

Вмѣсто этого можно написать $y = x^{\frac{1}{2}}$, тогда по формулѣ $\overline{VII}$: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Если же пользоваться только что доказанною теоремою, то стоитъ лишь опредѣлить обратную функцію $x = y^2$, тогда $\frac{dx}{dy} = \varphi'(y) = 2y$, откуда

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Производныя показательныхъ и логарифмическихъ функцій

Пусть требуется найти производную по=

показательной функции $y=a^x$

По формулѣ (40) получимъ: 2 22

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x=0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x=0}\frac{a^x\cdot a^{\Delta x}-a^x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x=0}a^x\frac{(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=$$

$$=a^x\lim_{\Delta x=0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

Введемъ новое обозначеніе $a^{\Delta x}-1=\varepsilon$

Тогда $a^{\Delta x}=1+\varepsilon$ или $\Delta x=\log_a(1+\varepsilon)$. (43)

Изъ ур-ія (43) видно, что если Δx приближается къ нулю, то и ε стремится къ нулю, такъ какъ $a^{\Delta x}$ приближается къ единицѣ:

$$\lim_{\Delta x=0}\varepsilon=0.$$

Подставляя наше новое обозначеніе и принимая вовнимание послѣдній выводъ, можно написать.

$$\frac{dy}{dx}=a^x\lim_{\varepsilon=0}\frac{\varepsilon}{\log_a(1+\varepsilon)}=a^x\lim_{\varepsilon=0}\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}\log(1+\varepsilon)}=a^x\lim_{\varepsilon=0}\frac{1}{\log(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}}$$

Обозначимъ $\frac{1}{\varepsilon}=w$. Если ε безконечно уменьшается, то w безконечно увеличивается, т. е.

$$\lim_{\varepsilon=0}w=\infty,$$ отсюда

$$\frac{dy}{dx}=a^x\lim_{w=\infty}\frac{1}{\log(1+\frac{1}{w})^w}$$

Намъ извѣстно (стр 209), что $\lim_{w=\infty}(1+\frac{1}{w})^w=e$ гдѣ $e=2{,}718$ отсюда

$$\frac{dy}{dx}=a^x\frac{1}{\log_a e}$$

Такимъ образомъ $$\frac{da^x}{dx}=\frac{a^x}{\log_a e}\text{ --- }(44).$$

Преобразуемъ теперь эту формулу такъ что=

бы въ ней вмѣсто логарифма при основаніи a получился логарифмъ при основаніи e. Эти послѣдніе логарифмы наз. Неперовыми или натуральными и обозначаются черезъ $\log nat$, ln или L. Съ этою цѣлью опредѣлимъ связь между логарифмами съ основаніемъ e и a.

Пусть
$$\left.\begin{array}{l} z = \log_a t \\ z_1 = \ln t \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots (45).$$

Изъ этихъ уравненій имѣемъ:
$$a^z = t.$$
$$e^{z_1} = t.$$

Отсюда $a^z = e^{z_1}$

Если теперь логарифмировать это выраженіе по основанію a, то получимъ:
$$z \log_a a = z_1 \log_a e.$$

Подставляя z и z_1 изъ формулъ (45) и замѣчая, что $\log_a a = 1$, получимъ:
$$\log_a t = \ln t \cdot \log_a e \text{ --- } (46).$$

Значитъ, чтобы отъ Неперова логарифма перейти къ логарифму при основаніи a, слѣдуетъ помножить первый на $\log_a e$. И наоборотъ:
$$\ln t = \log_a t \frac{1}{\log_a e}.$$

т. е. если логарифмъ какого-нибудь числа при основаніи a раздѣлить на $\log e$ при томъ же основаніи a, то получимъ Неперовъ логарифмъ этого числа. Такимъ образомъ для перехода отъ логарифма съ какимъ-либо основаніемъ къ логарифмамъ Неперовымъ, намъ служитъ всегда $\log_a e$, который называется модулемъ. Обыкновенно употребляютъ логарифмическія таблицы, въ которыхъ

за основаніе принято число 10. Для этихъ таблицъ $\log_{10} e = 0{,}4342945$,

$$\frac{1}{\log_{10} e} = 2{,}3025851.$$

Если въ ур-іи (46) придать t частное значеніе $t=a$, то первая часть обращается въ 1:

$$1 = \ln a \cdot \log_a e \text{ ------ } (47).$$

Отсюда $\log_a e = \frac{1}{\ln a}$

Если подставить это значеніе въ формулу (44), то получимъ:

$$\frac{da^x}{dx} = a^x \ln a \text{ ---- } \underline{XII}.$$

Опредѣлимъ теперь производную логариѳмической функціи: $y = \log_a x$.

Для этого воспользуемся формулою для производной обратной функціи ($\underline{XI'}$)

$$x = a^y,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d(a^y)}{dy}} = \frac{1}{a^y \ln a}.$$

Подставляемъ x вмѣсто a^y, получимъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln a}$$

Такъ что окончательная формула будетъ:

$$\frac{d \log_a x}{dx} = \frac{1}{x \ln a} \text{ --- } \underline{XIII}.$$

Если въ формулахъ ($\underline{XII}$) и ($\underline{XIII}$) придать для a частное значеніе $a=e$, то получимъ:

$$\frac{d e^x}{dx} = e^x \text{ -------- } \underline{XII}'$$

бы въ ней вмѣсто логариѳма при основаніи a получился логариѳмъ при основаніи e. Эти послѣдніе логариѳмы наз. Неперовыми или натуральными и обозначаются черезъ $\log nat$, $\ln$ или L. Съ этою цѣлью опредѣлимъ связь между логариѳмами съ основаніемъ e и a.

Пусть
$$\left.\begin{aligned} z &= \log_a t \\ z_1 &= \ln t \end{aligned}\right\} \text{-----------} (45).$$

Изъ этихъ уравненій имѣемъ:
$$a^z = t.$$
$$e^{z_1} = t.$$

Отсюда $a^z = e^{z_1}$

Если теперь логариѳмировать это выраженіе по основанію a, то получимъ:
$$z \log_a a = z_1 \log_a e.$$

Подставляя z и z_1 изъ формулъ (45) и замѣчая, что $\log_a a = 1$, получимъ:
$$\log_a t = \ln t \cdot \log_a e \text{ ---- } (46).$$

Значитъ, чтобы отъ Неперова логариѳма перейти къ логариѳму при основаніи a, слѣдуетъ помножить первый на $\log_a e$. И наоборотъ:
$$\ln t = \log_a t \cdot \frac{1}{\log_a e},$$

т. е. если логариѳмъ какого-нибудь числа при основаніи a раздѣлить на $\log e$ при томъ же основаніи a, то получимъ Неперовъ логариѳмъ этого числа. Такимъ образомъ для перехода отъ логариѳма съ какимъ-либо основаніемъ къ логариѳмамъ Неперовымъ, намъ служитъ всегда $\log_a e$, который называется модулемъ. Обыкновенно употребляютъ логариѳмическія таблицы, въ которыхъ

за основанie принято число 10. Для этихъ таблицъ $\log_{10} e = 0{,}4342945$,

$$\frac{1}{\log_{10} e} = 2{,}3025851.$$

Если въ ур-iи (46) придать t частное значенie $t = a$, то первая часть обращается въ 1:

$$1 = \ln a \cdot \log_a e \text{ ------ } (47).$$

Отсюда $\log_a e = \frac{1}{\ln a}$

Если подставить это значенie въ формулу (44), то получимъ:

$$\frac{da^x}{dx} = a^x \ln a \text{ ---- } \overline{XII}.$$

Опредѣлимъ теперь производную логариѳмической функцiи: $y = \log_a x$.

Для этого воспользуемся формулою для производной обратной функцiи ($\overline{XI'}$)

$$x = a^y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d(a^y)}{dy}} = \frac{1}{a^y \ln a}:$$

Подставляемъ x вмѣсто a^y, получимъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln a}$$

Такъ что окончательная формула будетъ:

$$\frac{d \log_a x}{dx} = \frac{1}{x \ln a} \text{ --- } \overline{XIII}.$$

Если въ формулахъ ($\overline{XII}$) и ($\overline{XIII}$) придать для a частное значенie $a = e$, то получимъ:

$$\frac{d e^x}{dx} = e^x \text{ -------- } \overline{XII}$$

$$\frac{d\ln x}{dx} = \frac{1}{x} \text{ ------ } XIII'.$$

Если помножимъ объ части послѣдняго ур-ія на dx, то получимъ. $d\ln x = \frac{dx}{x}$.

Дифференціалъ логарифма какой-нибудь величины A наз. <u>логарифмическимъ дифференціаломъ</u> этой величины. Относительно его существуетъ интересная теорема.

Пусть дано произведеніе функцій $u, u_2 \dots u_n$. Логарифмируя его получимъ:

$$\ln(u_1 u_2 \dots u_n) = \ln u_1 + \ln u_2 + \dots + \ln u_n.$$

Опредѣлимъ дифференціалъ этого выраженія съ помощью формулы (48):

$$\frac{d(u_1 u_2 \dots u_n)}{u_1 u_2 \dots u_n} = \frac{du_1}{u_1} + \frac{du_2}{u_2} + \dots + \frac{du_n}{u_n} \quad (49),$$

т.е. <u>логарифмическій дифференціалъ произведенія равенъ суммѣ логарифмическихъ дифференціаловъ множителей.</u>

Освободимъ послѣднюю формулу отъ знаменателя:

$$d(u_1+u_2+\dots+u_n) = u_2+\dots+u_n du_1 + u_1 u_3 + \dots + u_n du_2 + \dots u_1 \dots u_{n-1} du_n$$

Мы получили извѣстную намъ уже теорему, что дифференціалъ произведенія получается, если дифференціалъ каждаго множителя умножить на остальныхъ множителей и сложить полученныя произведенія.

Формулой XIII' можно воспользоваться, чтобы болѣе общимъ способомъ доказать теорему о производной степени при всякомъ значеніи показателя

Пусть $y = x^{\mu}$. Логарифмируя, получимъ

$$\ln y = \mu \ln x.$$

Дифференцируемъ по формулѣ XIII', причемъ обращаемъ вниманіе на то, что y есть нѣкоторая функція отъ x; слѣдовательно, дифференцируя лѣвую часть, надо примѣнить формулу X дифференцированія функціи отъ функціи x. Такимъ образомъ находимъ:

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \mu\cdot\frac{1}{x}; \quad \frac{dy}{dx} = \mu\cdot\frac{y}{x}.$$

Подставляя x^{μ} вмѣсто y:

$$\frac{dy}{dx} = \mu\frac{x^{\mu}}{x} = \mu x^{\mu-1}.$$

Относительно постоянной величины μ мы никакихъ предположеній не дѣлали, т.е. она можетъ быть положительной или отрицательной, цѣлой или дробной, раціональной или ирраціональной. Такимъ образомъ названная теорема доказана во всемъ объемѣ.

Производныя тригонометрическихъ функцій

Пусть $y = \sin x$.

Для вычисленія производной опять воспользуемся формулою (40) стр 218: $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x=0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$.

Числитель можно преобразовать, имѣя въ виду, что $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, и полагая, $\alpha = x+\Delta x$, $\beta = x$. Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x=0}\frac{2\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$=\lim_{\Delta x=0} \cos(x+\Delta x)\,\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

Предѣлъ перваго множителя для $\Delta x=0$ есть $\cos x$. Найдемъ предѣлъ второго множителя. Обозначая $\frac{\Delta x}{2}$ черезъ z, получимъ:

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\lim_{z=0}\frac{\sin z}{z}=1 \text{ (по стр. 195)}.$$

Отсюда $\frac{dy}{dx}=\cos x$. Такимъ образомъ получаемъ формулу.

$$\frac{d\sin x}{dx}=\cos x \text{ ------ } \underline{XIV}.$$

Такимъ же путемъ можно опредѣлить производную функціи: $y=\cos x$.

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x=0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}$$

Замѣчая, что $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, находимъ при $\alpha=x+\Delta x$, $\beta=x$:

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x=0}\frac{-2\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x=0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

Предѣлъ перваго множителя есть $\sin x$; предѣлъ второго равенъ единицѣ.

Отсюда: $\frac{dy}{dx}=-\sin x$;

$$\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x \text{ --- } \underline{XV}.$$

Эту формулу можно было бы вывести и другимъ путемъ. Извѣстно, что

$$y=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right).$$

Дифференцируя по формуламъ $\underline{XIV}$ и $\underline{X}$, получаемъ.

$$\frac{dy}{dx}=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{dx}=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x.$$

Найдемъ теперь производную функціи:

$y = tg\,x.$

Очевидно $\frac{dy}{dx} = \frac{d\,tg\,x}{dx} = \frac{d\,\frac{\sin x}{\cos x}}{dx}$

Производная частнаго находится по формулѣ IX; такимъ образомъ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x\, d\frac{\sin x}{dx} - \sin x\, d\frac{\cos x}{dx}}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x\, \sin(-x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Итакъ $\frac{d\,tg\,x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$ - - - - XVI.

Остается опредѣлить производную функціи

$$y = ctg\,x.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,ctg\,x}{dx} = \frac{d\frac{\cos x}{\sin x}}{dx} = \frac{\sin x \cdot \frac{d\cos x}{dx} - \cos x\frac{d\sin x}{dx}}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{\sin x(-\sin x) - \cos x \cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$\frac{d\,ctg\,x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x} \text{ - - - XVII.}$$

Эту теорему можно доказать еще иначе, если имѣть въ виду, что

$$y = ctg\,x = tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Дифференцируя получимую функцію отъ функціи, находимъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,tg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{dx} = \frac{d\,tg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{d\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} \cdot \frac{d\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{dx} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}(-1) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Производныя циклометрическихъ функцій.

Найдемъ производную круговой функціи $y = arc\sin x.$

Мы знаемъ, что въ такомъ случаѣ $x=\sin y$. Какъ найти производную такой функціи, намъ извѣстно (XIV), а вспомнивъ, что производная каждой функціи равна единицѣ, дѣленной на производную обратной функціи, находимъ:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{d\sin y}{dy}}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Отсюда получаемъ формулу:

$$\frac{d\arcsin x}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{---} \quad XVIII.$$

Подобнымъ же образомъ находится производная круговой функціи: $y=\arccos x$.

$$x=\cos y.$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{d\cos y}{dy}}=\frac{1}{-\sin y}=\frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2 y}}=\frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\frac{d\arccos x}{dx}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{---} \quad XIX.$$

Эту формулу легко вывести другимъ образомъ. Мы знаемъ, что $\sin z=\cos\left(\frac{\pi}{2}-z\right)$. Если это выраженіе приравнять x, то $z=\arcsin x$; $\frac{\pi}{2}-z=\arccos x$.

Слѣдовательно, $\arccos x=\frac{\pi}{2}-\arcsin x$,

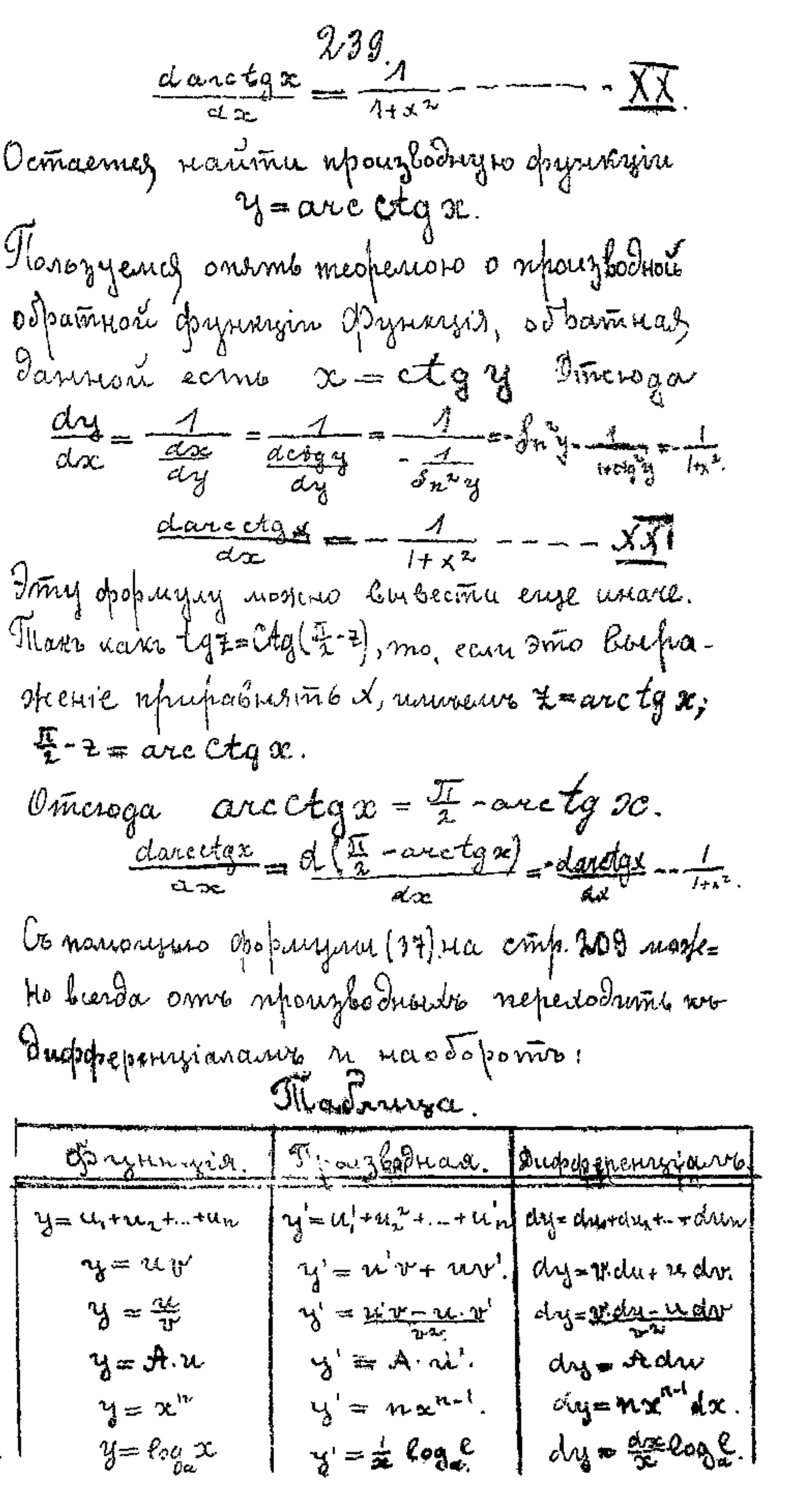
$$\frac{d\arccos x}{dx}=\frac{d\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x\right)}{dx}=-\frac{d\arcsin x}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Пусть $y=\operatorname{arctg} x$

обратная функція: $x=\operatorname{tg} y$.

Чтобы найти производную поступаемъ по предыдущему:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{d\operatorname{tg} y}{dy}}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}=\cos^2 y=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$



$$\frac{d\,\mathrm{arctg}\,x}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{---------} \quad \mathrm{XX}.$$

Остается найти производную функции

$$y = \mathrm{arc\,ctg}\,x.$$

Пользуемся опять теоремою о производной обратной функции. Функция, обратная данной есть $x = \mathrm{ctg}\,y$. Отсюда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d\,\mathrm{ctg}\,y}{dy}} = \frac{1}{-\frac{1}{\mathrm{sn}^2 y}} = -\mathrm{sn}^2 y = -\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$$\frac{d\,\mathrm{arcctg}\,x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2} \quad \text{-------} \quad \mathrm{XXI}$$

Эту формулу можно вывести еще иначе. Так как $\mathrm{tg}\,z = \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$, то, если это выраженіе приравнять x, имеем $z = \mathrm{arctg}\,x$; $\frac{\pi}{2} - z = \mathrm{arc\,ctg}\,x$.

Отсюда $\mathrm{arcctg}\,x = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\,x$.

$$\frac{d\,\mathrm{arcctg}\,x}{dx} = \frac{d\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\,x\right)}{dx} = -\frac{d\,\mathrm{arctg}\,x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Съ помощью формулы (17) на стр. 209 можно всегда отъ производныхъ переходить къ дифференціаламъ и наоборотъ:

Таблица.

	Функція.	Производная.	Дифференціалъ.
1	$y = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$	$y' = u_1' + u_2' + \ldots + u_n'$	$dy = du_1 + du_2 + \ldots + du_n$
2	$y = uv$	$y' = u'v + uv'$.	$dy = v\,du + u\,dv$.
3	$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - u\cdot v'}{v^2}$	$dy = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$
4	$y = A\cdot u$	$y' = A\cdot u'$.	$dy = A\,du$
5	$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$.	$dy = nx^{n-1}dx$.
6.	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x}\log_a e$	$dy = \frac{dx}{x}\log_a e$.

$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$.	$dy = \frac{dx}{x}$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$.	$dy = a^x \ln a \cdot dx$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$dy = e^x dx$
$y = \sin x$.	$y' = \cos x$	$dy = \cos x \cdot dx$
$y = \cos x$.	$y' = -\sin x$	$dy = -\sin x\, dx$
$y = tg x$.	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$dy = \frac{dx}{\cos^2 x}$
$y = ctg x$.	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$dy = -\frac{dx}{\sin^2 x}$.
$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos x$.	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$dy = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = arctg x$.	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$dy = \frac{dx}{1+x^2}$
$y = arc ctg x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$	$dy = -\frac{dx}{1+x^2}$.

Производная высшихъ порядковъ.

Пусть намъ была дана функція: $y=f(x)$, то производную ея мы обозначили однимъ изъ слѣдующихъ символовъ:

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x).$$

Мы видѣли, что эта производная также есть нѣкоторая функція отъ x. Понятно, что эту функцію можно также дифференцировать по формулѣ:

$$\frac{d f(x)'}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

Функція, которая опредѣляется по этому закону, называется производною второго порядка или второю производною данной функціи. Ее обозначаютъ:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = f''(x).$$

Если дифференцировать и эту функцію и т. д., то получимъ <u>производную $n^{\text{го}}$ порядка.</u>

$$\frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)} = f^{(n)}x.$$

Мы раньше нашли, что если движеніе точки выражается ур-іемъ $s = f(t)$, то первая производная этой функціи даетъ намъ скорость данной точки въ моментъ t

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t)$$

При неравномѣрномъ движеніи скорость не есть величина постоянная. Предѣлъ отношенія приращенія скорости къ потраченному времени $p = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$ называется ускореніемъ движенія. Ясно, что это будетъ производная v по t, т. е. $p = \frac{dv}{dt}$. Но такъ какъ v есть первая производная данной функціи, то p будетъ ея второю производною:

$$p = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = f''(t).$$

Въ частномъ случаѣ, при паденіи тѣла въ безвоздушномъ пр-ствѣ, имѣемъ

$$s = \frac{gt^2}{2}.$$

Скорость паденія въ данный моментъ t:

$$v = \frac{ds}{dt} = gt,$$

а ускореніе $p = \frac{dv}{dt} = g$.

Производныя высшихъ порядковъ играютъ

важную роль въ теоріи рядовъ.

Примѣръ I. $y=(a+bx)^{\mu}$.

Дифференцируя два раза, получаемъ:

$$\frac{dy}{dx}=\mu(a+bx)^{\mu-1}b \quad\text{- - - - - - - -}\quad (50)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\mu(\mu-1)(a+bx)^{\mu-2}b^2 \quad\text{- - -}\quad (51).$$

Если продолжать такимъ образомъ, то дойдемъ, наконецъ, до производной $n^{го}$ порядка:

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\mu(\mu-1)\text{- - - -}(\mu-n+1)(a+bx)^{\mu-n}b^n\text{- -}(52).$$

Докажемъ, что въ самомъ дѣлѣ эта формула справедлива для произвольнаго числа n. Дифференцируя ее, получаемъ:

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}=\mu(\mu-1)\text{- - - -}(\mu-n+1)(\mu-n)(a+bx)^{\mu-n-1}b^{n+1}.$$

Мы видимъ, что послѣдняя формула получается изъ формулы (52), если замѣнить n черезъ $n+1$; значитъ, если формула (52) справедлива для нѣкотораго цѣлаго и положительнаго n, то она справедлива и для послѣдующаго числа $n+1$. Сравнивая формулу (52) съ формулами (50) и (51), мы видимъ, что она справедлива при $n=1$, $n=2$; по только что доказанному она справедлива для $n=3$, а вслѣдствіе этого и для $n=4$ и т. д. для произвольнаго n.

Примѣръ II. $y=a^x$.

Первая и вторая производныя этой функціи суть:

$$\frac{dy}{dx}=a^x \ln a,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=a^x(\ln a)^2.$$

Продолжая такимъ образомъ, дойдемъ до производной $n^{\text{го}}$ порядка:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = a^x (\ln a)^n \text{ - - - - - - - } (53).$$

Для $n=1$ получимъ первую производную нашей функціи; для $n=2$ вторую производную. Значитъ наша формула справедлива для $n=1$ и для $n=2$. Чтобы доказать, что она справедлива для всякого значенія n, продифференцируемъ ее:

$$\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} = a^x (\ln a)^{n+1} \text{ - - - - - - } (54).$$

Формула (54) получается изъ (53) черезъ замѣну n на $n+1$, т. е. если она вѣрна для n, то вѣрна и для $n+1$. Мы нашли, что она справедлива для $n=1$, $n=2$, слѣдовательно, она справедлива и для произвольнаго n.

Положимъ. $y = e^x$

Производная $n^{\text{го}}$ порядка этой функціи получится, если въ формулѣ (53) вмѣсто a подставить e.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^x (\ln e)^n$$

Но $\ln e = 1$, слѣдовательно

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^x$$

т. е. функція e^x обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что всѣ ея производныя равны самой функціи.

<u>Примѣръ III</u> $\quad y = \ln x$

Первая производная есть

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

Производную $n^{ю}$ порядка мы получимъ, продифференцировавъ еще $n-1$ разъ:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^{n-1}(x^{-1})}{dx^{n-1}}$$

Для определенія этой производной можно пользоваться ур-ніемъ (53) если положить:

$$a=0, \quad b=1, \quad m=-1.$$

Но надо определить производную не $n^{ю}$, а $n-1^{го}$ порядка отъ x^{-1}, поэтому въ формулѣ (53) надо замѣнить n на $n-1$. Тогда получимъ:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)(-2)(-3)\ldots\ldots[-(n-1)]x^{-n}$$

Если (-1) вынести за скобки, то

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{(-1)^{n-1}\,1\cdot2\cdot3\ldots\ldots(n-1)}{x^n} \;---\;(55).$$

Произведеніе n первыхъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ символически обозначается такъ

$$1.2.3.\ldots\ldots n = n!$$

и читается *n факторіалъ*. Пользуясь этимъ символомъ, формулу (55) можно выразить такимъ образомъ:

$$\frac{d^n(\ln x)}{dx^n} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n} \;----\;(56).$$

Примѣръ IV. $y = \sin x.$

Найдемъ последовательныя производныя.

$$\frac{dy}{dx} = \cos x. \; ,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x. \; ,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x. \; ,$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \sin x. \; ,$$

т. е. $4^{ая}$ производная равна самой функціи. Пятая производная будетъ очевидно равна пер=

вой производной и т. д. Значенія производныхъ чередуются. Легко также соединить всѣ эти производныя въ общей формулѣ. Для этого замѣтимъ, что, такъ какъ $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, то

$$\frac{dy}{dx} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Т. е. отъ дифференцированія функціи $\sin x$ аргументъ увеличивается на $\frac{\pi}{2}$. Послѣ n-кратнаго дифференцированія, мы, слѣдовательно, получимъ:

$$\frac{d^n \sin x}{dx^n} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \text{ --- } (57).$$

Примѣръ V. $y = \cos x$.

Поступая такъ же, какъ въ предыдущемъ случаѣ, находимъ:

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x. \qquad \frac{d^3 y}{dx^3} = \sin x.$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\cos x \qquad \frac{d^4 y}{dx^4} = \cos x$$

и т. д.

причемъ значенія производныхъ опять чередуются. Вмѣсто $y = \cos x$ можно написать:

$$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Сравнивая эту функцію съ предыдущей $y = \sin x$, заключаемъ, что формулу для $n^{ой}$ производной получимъ, если въ формулѣ (57) прибавимъ къ аргументу $\frac{\pi}{2}$.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + n\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left[x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right].$$

Такъ какъ наша первоначальная функція была $y = \cos x$, то можно было бы и производную выразить помощью Cos:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \text{ --- --- } (58).$$

Функціи о двухъ перемѣнныхъ.

До сихъ поръ мы разсматривали только функціи съ одного перемѣннаго; но, конечно, все то, что мы говорили относительно этихъ функцій можно распространить и на функціи о нѣсколькихъ перемѣнныхъ величинахъ. Примѣръ функціи о трехъ перемѣнныхъ намъ извѣстенъ изъ аналитической геометріи въ пространствѣ, а именно ур-іе поверхности. Если въ плоскости (xy) возьмемъ какую-нибудь точку Q, то соотвѣтственную точку P поверхности найдемъ, возставивъ въ Q перпендикуляръ къ (xy) до пересѣченія съ данною поверхностью. Различнымъ положеніямъ точки Q на плоскости (xy) соотвѣтствуютъ различныя точки поверхности, а, слѣдовательно, и различныя значенія z. Но положеніе точки Q, если ур-іе поверхности дано, опредѣляется двумя координатами x и y, слѣдовательно z зависитъ отъ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ т.е. z есть функція x и y.

Фиг. 66

Символически функція о двухъ перемѣнныхъ изображается такъ $z = f(x, y)$.

Объемъ v данной массы газа зависитъ, какъ извѣстно, отъ давленія p и отъ температуры t, по формулѣ $v = \frac{a}{p}(1 + kt)$,

гдѣ a и k постоянныя величины. Если изслѣдовать измѣненіе объема при постоянной тем=

пература, то-е постоянная величина; следовательно, $a(1+kt)=A$, гдѣ A постоянная величина.
Тогда $v=\frac{A}{p}$,
т.е. мы получаемъ законъ Маріотта, по которому объемъ обратно пропорціоналенъ давленію.
Если p придать частное значеніе p_0, то получимъ, что $\frac{a}{p_0}=B$ есть постоянная величина.
Тогда $v=B(1+kt)$,
т.е. при постоянномъ давленіи объемъ газа измѣняется пропорціонально температурѣ (Законъ Гей-Люссака).
Пусть намъ дана нѣкоторая функція о двухъ независимыхъ перемѣнныхъ:
$$z=f(x,y) \text{ - - - - - } (59).$$
Если x придать приращеніе Δx, а y оставить безъ измѣненія, т.е. предположить y постояннымъ, то соотвѣтственное приращеніе z обозначается черезъ $\Delta_x z$ и наз. <u>частнымъ приращеніемъ</u> z по отношенію къ x:
$$z+\Delta_x z=f(x+\Delta x, y) \text{ - - - - - } (60)$$
Чтобы опредѣлить $\Delta_x z$, вычтемъ ур-іе (59) изъ ур-ія (60):
$$\Delta_x z=\Delta_x f(x,y)=f(x+\Delta x, y)-f(x,y) \text{ - - - } (61).$$
Подобнымъ образомъ получаемъ частное приращеніе z по отношенію къ y:
$$\Delta_y z=\Delta_y f(x,y)=f(x,y+\Delta y)-f(x,y) \text{ - - - } (62).$$
Если же обѣимъ независимымъ перемѣннымъ

x и y придать приращения Δx и Δy, то z получит приращение Δz, которое называется <u>полнымъ приращеніемъ</u>

$$z+\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)\text{------}(63).$$

Чтобы определить полное приращеніе Δz, стоитъ только вычесть ур-іе (59) изъ (63).

$$\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y).$$

Это выраженіе не измѣнится, если прибавимъ и вычтемъ $f(x,\ y+\Delta y)$:

$$\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y+\Delta y)+f(x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)\text{--}(64).$$

Это выраженіе можно разсматривать какъ сумму двухъ слагаемыхъ, причемъ первое слагаемое получается, если въ выраженіи (61) замѣнить y черезъ $y+\Delta y$, т. е.

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y+\Delta y)=\Delta_x f(x,\ y+\Delta y).$$

Второе же слагаемое, по ур-ію (62), есть $\Delta_y f(x,y)$, слѣдовательно $\Delta z=\Delta f(x,y)=\Delta_x f(x,\ y+\Delta y)+\Delta_y f(x,y)$—(65).

Если теперь приращенія Δx и Δy все уменьшаются, то $f(x,\ y+\Delta y)$ приближается къ $f(x,\ y)$:

$$f(x,\ y+\Delta y)=f(x,\ y)+\varepsilon,$$

а при безконечномъ уменьшеніи Δy, разность ε дѣлается безконечно-малой, т. е. въ предѣлѣ можно его пренебречь. Тогда ур-іе (65) принимаетъ видъ

$$\Delta z=\Delta f(x,y)=\Delta_x f(x,y)+\Delta_y f(x,\ y)+\Delta_x\varepsilon$$

Если теперь перейти къ предѣлу, то символъ Δ переходитъ въ d, послѣднимъ членомъ можно пренебречь; такъ что

$$\underline{dz=df(x,y)=d_x f(x,y)+d_y f(x,y)}\text{----}(66).$$

$d_x f(x,y)$ и $d_y f(x,y)$ наз. частными дифференціалами, а $df(x,y)$ полнымъ дифференціаломъ. Частными дифференціалами, значитъ, наз. безконечно-малыя приращенія функціи, соотвѣтствующія безконечно-малымъ измѣненіямъ одной только независимой перемѣнной, полный же дифференціалъ есть безконечно-малое приращеніе функціи, которое соотвѣтствуетъ безконечно-малому измѣненію, какъ x, такъ и y. Изъ формулы (66) имѣемъ, что полный дифференціалъ равенъ суммѣ частныхъ дифференціаловъ.

Раздѣлимъ ур-іе (61) на Δx:

$$\frac{\Delta_x f(x,y)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}.$$

Переходя къ предѣлу, получимъ:

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta_x f(x,y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x=0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}.$$

Если Δx дѣлается безконечно-малымъ, то мы получаемъ dx; при этомъ частное приращеніе Δ_x переходитъ въ частный дифференціалъ dx. Такимъ образомъ, въ лѣвой части получимъ:

$$\frac{d_x f(x,y)}{dx}.$$

Правая же часть по ур-ію (40) представляетъ производную, которая получится, если y полагать постояннымъ. Такая производная наз. частною производною функціи $f(x,y)$ по x. Для отличія вмѣсто d; пишутъ ∂; такимъ образомъ:

$$\frac{d_x f(x,y)}{dx} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}.$$

Такимъ же образомъ получимъ:

$$\frac{d_y f(x,y)}{dy} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}.$$

Послѣднія формулы можно представить въ такомъ видѣ:

$$d_x f(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\cdot dx,$$

$$d_y f(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\cdot dy.$$

Если подставить эти значенія въ формулу (66), то получимъ:

$$df(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy \quad \text{---(67)}$$

Примѣръ. Пусть дана функція $f(x,y) = z = x^2 + y^2$. Требуется опредѣлить ея полный дифференціалъ. Чтобы найти частную производную по x, полагаемъ y постояннымъ и дифференцируемъ нашу функцію по x. Тогда производная отъ y^2 будетъ равна нулю и мы получимъ:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = 2x.$$

Частную производную по y получимъ, если примемъ x за постоянную

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = 2y.$$

Отсюда, по формулѣ (67) полный дифференціалъ будетъ:

$$df(x,y) = dz = 2x\cdot dx + 2y\cdot dy.$$

Чтобы теперь перейти отъ дифференціала къ производной, раздѣлимъ ур-іе (64) на Δx:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x} + \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

причемъ второе слагаемое мы раздѣлили и умножили на Δy.
Если перейти къ предѣлу, то первое слагаемое переходитъ въ частную производную по x, а второе въ частную производную по y умноженную на $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \text{ ---- } (62).$$

Въ нашемъ частномъ примѣрѣ получимъ:

$$\frac{dz}{dx} = q_x + q_y \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Какъ видимъ, въ функціяхъ съ двумя независимыми перемѣнными производная не вполнѣ опредѣлена такъ намъ не извѣстно, чему равно $\frac{dy}{dx}$. Эту неопредѣленность легко уяснить себѣ, если обратиться къ геометрическому изображенію.
Пусть изображеніемъ данной фигуры будетъ нѣкоторая поверхность. Возьмемъ на ней какія-нибудь двѣ точки $P(x,y,z)$ и $P'(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$. Если $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ дѣлаются безконечно-малыми, то точка P' приближается къ P и линія PP' переходитъ въ касательную къ поверхности въ точкѣ P. Точка P' находится на этой касательной на безконечно-близкомъ разстояніи отъ P. Такъ какъ въ данной точкѣ, къ поверхности можно провести безконечно-много каса=

фиг. 37

тельной, то положение последней (и вместе съ этимъ положеніе точки P') будетъ опредѣлено только тогда, если извѣстна еще проекція касательной на плоскость (xy), образующая съ осью $x^{овъ}$ уголъ γ. Но намъ извѣстно, что если $\Delta Q'$ образуетъ съ осью $x^{овъ}$ уголъ τ, то

$$tg\,\tau = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

При сближеніи точекъ P и P' точки Q и Q' тоже сближаются и уголъ τ принимаетъ предѣльное значеніе γ $\quad \gamma = \lim \tau$;

тогда $tg\,\gamma = \lim tg\,\tau = \lim\limits_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$.

Если опредѣленъ уголъ γ, то и касательная поверхности въ точкѣ P опредѣлена. Слѣдовательно, производная нашей функціи будетъ опредѣлена, если извѣстно $\frac{dy}{dx}$.

Дифференцированіе неявныхъ функцій

Если дана функція $z = f(x, y)$ --- (69)

то, какъ мы нашли,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \text{ ---- } (70).$$

Если положить, что $z = 0$ и не измѣняется, то $\Delta z = 0$, слѣдовательно, и $\lim \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{dz}{dx} = 0$, и ур-ія (69) и (70) примутъ видъ

$$f(x, y) = 0 \text{ -------- } (71).$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \text{ ---- } (72).$$

Ур-іе (71) опредѣляетъ y, какъ неявную функцію отъ x. Если же уравненіе (72).

рѣшить относительно $\frac{dy}{dx}$, то мы получимъ производную этой неявной функціи въ видѣ:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}} \;----\;(73).$$

Примѣръ I. Пусть дана неявная функція

$$y - x^2 = 0$$

Сравнивая съ ур-іемъ (71) можно написать:

$$f(x, y) = y - x^2.$$

Чтобы опредѣлить производную по формулѣ (72), слѣдуетъ найти частныя производныя по x и по y. Предполагая y постояннымъ, получаемъ:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -2x.$$

Частную производную по y найдемъ, предполагая x постояннымъ.

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 1.$$

По формулѣ (73) имѣемъ:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-2x}{1} = 2x.$$

Можно было бы рѣшить наше уравненіе относительно y:

$$y = x^2.$$

и дифференцировать полученную явную функцію:

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

При этомъ мы приходимъ къ тому же выводу.

Примѣръ II. $e^{x+y} - xy = 0 \;----\;(74).$

или $f(x, y) = e^{x+y} - xy.$

частную производную по x получимъ полагая y постояннымъ; тогда производная e^{y+x} опредѣлится по формулѣ $\overline{III}'$ (стр. 233), т. е. будетъ e^{y+x}, а производную x^y найдемъ по формулѣ $\overline{V}$, т. е. эта производная будетъ равна yx^{y-1}. Такимъ образомъ:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=e^{y+x}-yx^{y-1}.$$

Если положить x постояннымъ, то производная функціи x^y по формулѣ $\overline{III}$ равна $x^y \ln x$; отсюда

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=e^{y+x}-x^y \ln x.$$

Теперь по формулѣ (73) имѣемъ:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{e^{y+x}-yx^{y-1}}{e^{y+x}-x^y \ln x} \quad \text{- - - - -} \quad (75).$$

Это выраженіе можно значительно упростить. Изъ ур-ія (74) имѣемъ:

$$e^{y+x}=x^y.$$

Подставляя это значеніе въ формулѣ (75), получаемъ: $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x^y-yx^{y-1}}{x^y-x^y \ln x}$

Сокращая на x^y. $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1-\frac{y}{x}}{1-\ln x}$ - - - (76).

Кромѣ того, мы можемъ выразить y черезъ x коль скоро замѣтимъ, что изъ форм. (74) слѣдуетъ:

$$y+x=y\ln x.$$

$$\text{или}\quad y=\frac{-x}{1-\ln x}$$

Подставляя значеніе y въ ур-іе (76), получаемъ:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1+\frac{1}{1-\ln x}}{1-\ln x}=\frac{\ln x-2}{(1-\ln x)^2}$$

Производную функцію, опредѣленной ур-іемъ (74), можно было бы найти, рѣшая ур-іе относительно y: $y = \frac{-x}{1-\ln x}$,

и затѣмъ дифференцируя:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(1-\ln x)-(-x)(-\frac{1}{x})}{(1-\ln x)^2} = \frac{\ln x - 2}{(1-\ln x)^2}$$

__Примѣръ III__ $1 + xe^y - y = 0$ ---- (77)

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^y; \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = xe^y - 1.$$

Слѣдовательно, по формулѣ (73):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^y}{xe^y - 1}.$$

Но изъ ур-ія (77) имѣемъ: $xe^y = y - 1$,

отсюда $\frac{dy}{dx} = -\frac{e^y}{y-2} = \frac{e^y}{2-y}$.

Найдемъ производную еще другимъ способомъ, для чего рѣшимъ ур-іе (77) относительно x.

$$x = \frac{y-1}{e^y}.$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{e^y - (y-1)e^y}{e^{2y}} = \frac{1-y+1}{e^y} = \frac{2-y}{e^y}.$$

Откуда $\frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{2-y}$.

__Примѣръ IV.__ Въ нѣкоторыхъ случаяхъ ур-іе невозможно рѣшить относительно какой бы то ни было перемѣнной; тогда производную можно найти только при помощи частныхъ производныхъ. Пусть, напримѣръ, дана функція

$$x\sin y - y\cos x = 0.$$

Ур-іе нельзя рѣшить, ни относитель=

но x, ни относительно y. Но по формуламъ (73) на-ходимъ: $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin y + y\sin x}{x\cos y - \cos x}$

Функціи о трехъ и болѣе перемѣнныхъ

Пусть дана функція $u = f(x, y, z)$. Конечно, здѣсь мы также получимъ частныя производныя относительно каждой перемѣнной, если другія перемѣнныя примемъ за постоянныя. Такимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} &= \lim_{\Delta x=0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\Delta x} \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} &= \lim_{\Delta y=0} \frac{f(x, y+\Delta y, z) - f(x,y,z)}{\Delta y}. \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} &= \lim_{\Delta z=0} \frac{f(x, y, z+\Delta z) - f(x,y,z)}{\Delta z} \end{aligned}\right\} \text{--(78)}$$

Теперь положимъ что всѣ три перемѣнныя измѣняются сразу, т. е. x переходитъ въ $x+\Delta x$, y въ $y+\Delta y$, z въ $z+\Delta z$. Тогда будемъ имѣть:

$$u+\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z).$$

Отсюда $\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z)$.

Это выраженіе не измѣнится, если прибавимъ и вычтемъ $f(x, y+\Delta y, z+\Delta z) + f(x, y, z+\Delta z)$.

Раздѣливъ затѣмъ на Δx, получимъ:

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y+\Delta y, z+\Delta z)}{\Delta x} +$$

$$+ \frac{f(x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z+\Delta z)}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{f(x, y, z+\Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}\frac{\Delta z}{\Delta x}.$$

Если Δx, Δy и Δz дѣлаются безконечно малыми, то, принимая во вниманіе уравненія

(78), получаемъ:

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}+\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}\quad(79)$$

Полученная полная производная определена не вполнѣ, ибо неизвѣстны $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$. Изъ вывода этой формулы слѣдуетъ, что ее можно распространить на произвольное число перемѣнныхъ, такъ что, если дана функція

$$u=f(x,y,z\ldots\ldots t),\ \text{то}$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}+\ldots\ldots+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{dt}{dx}\quad(80).$$

Это выраженіе неопредѣлено, пока неизвѣстны $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ и т. д. если же $y, z\ldots t$ суть функціи перваго аргумента x:

$$y=\varphi(x),\quad z=f(x),\ \ldots\ldots\ t=\chi(x),$$

то u будетъ функціей одной только перемѣнной x и помощью формулы (80) легко опредѣлить производную $\frac{du}{dx}$.

<u>Примѣръ I.</u> $u=x\,\mathrm{arctg}\,x+\mathrm{arc}\sin x$

Для опредѣленія производной можно было бы пользоваться прежними способами; но если обозначить

$$\left.\begin{array}{l} y=\mathrm{arctg}\,x.\\ z=\mathrm{arc}\sin x.\end{array}\right\}\ \ldots\ldots\ (81).$$

то получимъ: $u=xy+z$

Дифференцируя при помощи формулы (80) находимъ:

$$\frac{du}{dx}=y+x\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}.$$

Но изъ ур-ій (81) имѣемъ:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2};\quad \frac{dz}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Подставляя эти значенія, получаемъ:

$$\frac{du}{dx}=\operatorname{arctg} x+\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

<u>Примѣръ II.</u> $u=x^{(x^x)}$. ------ (82).

Производную легко опредѣлить, пользуясь ур-іемъ (80). Мы полагаемъ:

$$\left.u=x^{(y^z)},\ \text{гдѣ}\ \begin{matrix}y=x.\\ z=x.\end{matrix}\right\}\text{------}(83).$$

$$\frac{du}{dx}=y^z x^{y^z-1}+x^{(y^z)}\ln x\cdot z\cdot y^{z-1}\frac{dy}{dx}+x^{(y^z)}\ln x\cdot y^z\ln y\frac{dz}{dx}.$$

Подставляя теперь x вмѣсто y и z, по ур-іемъ (83) получимъ:

$$\frac{du}{dx}=x^x\cdot x^{x^x-1}+x^{(x^x)}\ln x\cdot x\cdot x^{x-1}+x^{(x^x)}\ln x\cdot x^x\ln x=$$

$$=x^x x^{x^x-1}+x^{(x^x)}\cdot x^x\ln x+x^{(x^x)}\cdot x^x(\ln x)^2=x^{(x^x)}x^x\left(\frac{1}{x}+\ln x+(\ln x)^2\right).$$

Можно было бы опредѣлить производную, логарифмируя два раза первоначальное ур-іе (82).

$$\ln u=x^x\ln x.$$

$$\ln(\ln u)=x\ln x+\ln(\ln x).$$

$$\ln(\ln u)-x\ln x-\ln(\ln x)=0=f(x,u).$$

Полученное ур-іе можно дифференцировать какъ неявную функцію:

$$\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}=-\ln x+(-x)\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln x}\ \frac{1}{x}=-\ln x-1-\frac{1}{x\ln x}.$$

$$\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}=\frac{1}{u\ln u}=\frac{1}{x^{(x^x)}x^x\ln x}.$$

Отсюда по формулѣ (73):

$$\frac{du}{dx}=\left(\ln x+1+\frac{1}{x\ln x}\right)x^{(x^x)}x^x\ln x=x^{(x^x)}x^x\cdot\left\{(\ln x)^2+\ln x+\frac{1}{x}\right\}.$$

<u>Частныя производныя втораго порядка.</u>

Пусть $z=f(x,y)$.

Мы знаемъ, что если дифференцировать эту функцію, полагая постоянными сначала y, потомъ x, то получимъ частныя производныя по x и по y.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}.$$

Эти два выраженія въ свою очередь представляютъ нѣкоторыя функціи двухъ перемѣнныхъ x и y, слѣдовательно, ихъ также можно дифференцировать по x и y. Полученныя такимъ образомъ производныя наз. <u>вторыми частными производными</u> <u>или частными производными второго порядка.</u>

Такъ, если первую частную производную дифференцировать по x, то полученная производная обозначается:

$$\frac{\partial \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}{\partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}.$$

Если же дифференцировать эту же производную по y, то получимъ:

$$\frac{\partial \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}{\partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\, \partial x}$$

Теперь дифференцируемъ другую частную производную сначала по x, потомъ по y:

$$\frac{\partial \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}{\partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \cdot \partial y}; \quad \frac{\partial \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}{\partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}.$$

Такимъ образомъ мы получаемъ **четыре** частныя производныя второго порядка.

<u>Примѣръ I.</u> $f(x,y) = y^x$.

Частныя производныя будутъ:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y^x \ln y; \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x y^{x-1}.$$

Производныя второго порядка получатся въ формѣ:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = y^x (\ln y)^2 \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\, \partial x} = x y^{x-1} \ln y + y^{x-1}.$$

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x.\partial y}=y^{x-1}+xy^{x-1}$; $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=x(x-1)y^{x-2}$

Мы замѣчаемъ, что

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y.\partial x}=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x.\partial y}.$$

Примѣръ II. $f(x.y)=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

Находимъ сперва частныя производныя перваго порядка:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot y\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-y}{x^2+y^2};\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Вторыя частныя производныя будутъ:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y.\partial x}=\frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x.\partial y}=\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Мы здѣсь имѣемъ $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y.\partial x}=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x.\partial y}$,

т.е. мы собственно получаемъ не четыре, а три частныхъ производныхъ втораго порядка.

По опредѣленію производной, мы можемъ написать:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y.\partial x}=\frac{\partial\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}{\partial y}=\lim_{\Delta y=0}\frac{\frac{\partial f(x,y+\Delta y)}{\partial x}-\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}{\Delta y}=$$

$$=\lim_{\Delta y=0}\left\{\frac{\lim_{\Delta x=0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)}{\Delta x}-\lim_{\Delta x=0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}}{\Delta y}\right\}=$$

$$=\lim_{\Delta y=0}\left\{\lim_{\Delta x=0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)+f(x,y)}{\Delta x.\Delta y}\right\}.\quad(84).$$

Это выраженіе совершенно симметрично по отношенію къ x и y, т.е. если переставить x и y, то выраженіе не измѣнится. Изъ этого

слѣдуетъ, что мы для $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \cdot \partial y}$ получимъ такое же самое выраженіе. На основаніи этого уже можно заключить, что при частныхъ примѣрахъ мы не случайно получали

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \cdot \partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \cdot \partial y} \text{ - - - - - - } (85),$$

но что эта теорема болѣе общая.

Слѣдуетъ впрочемъ замѣтить, что разница при вычисленіи этихъ производныхъ по формулѣ (84) состоитъ въ томъ, что при опредѣленіи $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \cdot \partial x}$ сначала опредѣляется предѣлъ при $\Delta x = 0$, а потомъ предѣлъ по $\Delta y = 0$, при нахожденіи же $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \cdot \partial y}$ опредѣленіе предѣловъ производится въ обратномъ порядкѣ. Дѣйствительно, вслѣдствіе этого обстоятельства, ур-іе (85) въ нѣкоторыхъ случаяхъ, изслѣдованіемъ которыхъ мы не займемся, теряетъ свою силу.

О рядахъ.

Одною изъ задачъ дифференціальнаго исчисленія является вычисленіе функцій по данному значенію аргумента. Если подобное вычисленіе возможно и въ элементарной математикѣ, то, во всякомъ случаѣ, съ значительными затрудненіями. Высшая же математика доставляетъ намъ болѣе удобный методъ такого вычисленія, именно, разложеніе функцій въ ряды.

Пусть намъ данъ рядъ величинъ, составленныхъ по нѣкоторому закону и продолженный до безконечности:

$$u_1\ u_2\ u_3 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Складывая эти величины, получимъ выраженіе называемое суммою безконечнаго ряда, или просто безконечнымъ рядомъ:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} u_\nu = u_1 + u_2 + u_3 + \dots \text{ in inf.} \quad \text{------ (86)}$$

Величины, составляющія рядъ называются его членами.

Примѣръ разложенія функціи въ безконечный рядъ мы получимъ если раздѣлимъ 1 на 1-x; тогда

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \text{ in inf.} \quad \text{------ (87)}$$

Если принять $x = \frac{2}{5}$, то $\frac{1}{1-x} = \frac{5}{3}$.

Подставляя теперь значеніе x въ правую часть ур-ія (87), получимъ слѣдующія значенія для отдѣльныхъ членовъ:

$1 = 1{,}0000$	$x^6 = 0{,}0041$.
$x = 0{,}4000$	$x^7 = 0{,}0016$.
$x^2 = 0{,}1600$	$x^8 = 0{,}0006$
$x^3 = 0{,}0640$	$x^9 = 0{,}0002$.
$x^4 = 0{,}0256$	$x^{10} = 0{,}0001$.
$x^5 = 0{,}0102$.	

Складывая, получимъ: $1 + x + x^2 + \dots = 1{,}6666$, т.е получимъ выраженіе, которое при достаточной точности, произвольно-мало отличается отъ численнаго значенія лѣвой части равенства (87).

Пусть теперь $x = 2$; если опять подставить это значеніе въ ур-іе (87), то получимъ:

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots\dots = \infty.$$

Очевидно, мы получаемъ парадоксъ, ибо -1 не можетъ равняться ∞.

Полагая $x = -1$, получаемъ:

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots\ldots,$$

т. е. опять безсмыслицу, ибо правая часть рав на 1 или 0, въ зависимости отъ того, берем ли мы нечетное или четное число членовъ.

Чтобы объяснить полученные парадоксы, необходимо установить понятіе о сходимости рядовъ.

Ряды бываютъ двоякаго рода: сходящіеся и расходящіеся. Безконечный рядъ наз. сходящимся, если сумма n первыхъ членовъ, при безконечномъ увеличеніи n, имѣетъ предѣломъ опредѣленную конечную величину.

Обозначимъ сумму безконечнаго ряда (86) черезъ S, сумму n первыхъ членовъ черезъ S_n; такъ что:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n.$$

Если назовемъ сумму остальныхъ членовъ черезъ R_n, то

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots \text{ in inf.} \quad \text{---} (88).$$

Очевидно, что $S = S_n + R_n$.

R_n наз. остаточнымъ членомъ ряда.

По опредѣленію, рядъ будетъ сходящійся, если

$$\lim_{n=\infty} S_n = A$$

Если сумма n первыхъ членовъ стремится къ предѣлу, то, очевидно, что остаточный членъ стремится къ нулю: $\lim\limits_{n=\infty} R_n = 0$. — — — — — — (89).

Ясно также, что если каждый изъ n первыхъ членовъ имѣетъ опредѣленную величину, то условіе (89) не только необходимо, но и достаточно, чтобы рядъ былъ сходящимся

<u>Примеръ</u> Пусть дана геометрическая прогрессія.

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\ldots \text{ in inf.} \quad \text{---} (90).$$

Рядъ будетъ сходящійся, если сумма

$$S_n = 1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}.$$

стремится къ предѣлу при безконечномъ увеличеніи n. По извѣстной формулѣ элементарной математики:

$$S_n = \frac{x^n-1}{x-1} = \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}.$$

Отсюда $$\lim_{n=\infty} S_n = \frac{1}{1-x} - \lim_{n=\infty}\frac{x^n}{1-x} \quad \text{---} (91).$$

Очевидно S_n только тогда можетъ имѣть опредѣленный конечный предѣлъ, если вычитаемое $\frac{x^n}{1-x}$ имѣетъ такой предѣлъ; но послѣднее возможно только при $|x|<1$, ибо тогда числитель дроби $\frac{x^n}{1-x}$ будетъ безпрерывно уменьшаться при увеличеніи n; такъ что

$$\lim_{n=\infty}\frac{x^n}{1-x} = 0$$

Итакъ, если $|x|<1$, то рядъ (90) будетъ сходящійся. Если же $|x|>1$, то x^n безконечно увеличивается и предѣла не существуетъ, т.е. рядъ будетъ расходящійся.

Пусть теперь $x=+1$, тогда знаменатель выраженія $\frac{x^n}{1-x}$ равенъ нулю и выраженіе безконечно велико. т.е. не имѣетъ опредѣленнаго конечнаго предѣла.

Слѣдовательно, рядъ (90) будетъ расходящійся.

Если $x=-1$, то въ правой части ур-ія (91) получаемъ:

$$\frac{1}{2} - \frac{(-1)^n}{2}.$$

Второй членъ равенъ $+\frac{1}{2}$ или $-\frac{1}{2}$ въ зависи=

мости отъ того, будетъ ли n четнымъ или нечетнымъ членомъ, т.е. мы получаемъ, что сумма S_n будетъ равна единицѣ или нулю, смотря по тому, ограничимся ли мы четнымъ или нечетнымъ числомъ членовъ. Такой рядъ наз. колебательнымъ. Такъ какъ въ этомъ случаѣ не существуетъ опредѣленнаго предѣла, то колебательный рядъ разсматриваютъ, какъ частный случай расходящагося ряда.

Такимъ образомъ мы видимъ, что рядъ (90), смотря по значенію x, можетъ быть сходящимся или расходящимся и на основаніи прежнихъ изслѣдованій этого ряда, можно сказать, что для того, чтобы разложеніе дало вѣрный результатъ, необходимо, чтобъ рядъ былъ сходящимся.

Можно дать еще другое опредѣленіе сходимости рядовъ, пользуясь приведеннымъ числовымъ примѣромъ. Чтобы первыя три цифры десятичной дроби были вѣрны, необходимо было взять сумму 11 членовъ. Если-бы надо было вычислить сумму съ точностью до одной сотой, то можно было бы ограничиться девятью членами и т.д. Вообще, если намъ нужно, чтобы первыя m цифръ были вѣрны, то надо составить сумму изъ n членовъ, причемъ для каждаго числа m можно найти соотвѣтственное число n.

На этомъ основаніи, рядъ наз. сходящимся, если каждому цѣлому положительному

числу m можно подобрать такое число n, что если сложить первые n членов, то результат получится съ точностью до $\frac{1}{10^m}$

Мы нашли, что въ случаѣ сходящагося ряда:

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0 \text{ --------- } (92).$$

Для этого необходимо, чтобы члены, начиная съ нѣкотораго числа n, по абсолютной величинѣ убывали и наконецъ становились безконечно-малыми, при безконечномъ увеличенiи n. Но этого послѣдняго условiя еще недостаточно, для того, чтобы рядъ былъ сходящiйся, въ чемъ легко убѣдиться на слѣдующемъ примѣрѣ. Пусть данъ рядъ: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\dots\dots$ in inf.

Хотя здѣсь члены безпрерывно уменьшаются, однако рядъ этотъ не будетъ сходящимся. Для доказательства разложимъ рядъ на безконечное число слагаемыхъ слѣдующимъ образомъ:

$$1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{15}\right)+\dots\dots$$

Каждое изъ этихъ слагаемыхъ, очевидно, больше $\frac{1}{2}$:

$$1>\frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}>\frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}>\frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{15}>\frac{1}{2}.$$

Такъ какъ число этихъ слагаемыхъ безконечно-велико, то, складывая ихъ, получимъ величину безконечно-большую, т. е. сумма n первыхъ членовъ, при безконечномъ увеличенiи n, не имѣетъ предѣла, вслѣдствiе чего рядъ будетъ расходящiйся, хотя члены без=

конечно уменьшается.

Это условие будет достаточно, только въ томъ случаѣ, если члены ряда попеременно положительны и отрицательны. Докажемъ эту теорему.

По формулѣ (88):

$$R_n = U_{n+1} + U_{n+2} + U_{n+3} + \dots\dots$$

Положимъ, что знаки членовъ чередуются, и что $|U_{n+1}| > |U_{n+2}| > |U_{n+3}| \dots\dots$ (93).

Можно всегда положить, что первый членъ суммы R_n положителенъ, ибо, если бы онъ былъ отрицателенъ, то за остаточный членъ можно было-бы принять сумму членовъ, начиная съ U_{n+2}. Итакъ:

$$U_{n+1} > 0.$$
$$U_{n+2} > 0$$
$$U_{n+3} > 0.$$
$$\dots\dots$$

Введемъ абсолютныя величины членовъ

$$U_{n+1} = |U_{n+1}|.$$
$$-U_{n+2} = |U_{n+2}|$$
$$U_{n+3} = |U_{n+3}|$$
$$-U_{n+4} = |U_{n+4}|.$$
$$\dots\dots$$

Тогда можемъ написать:

$$R_n = \{|U_{n+1}| - |U_{n+2}|\} + \{|U_{n+3}| - |U_{n+4}|\} + \dots\dots (94)$$

или $R_n = |U_{n+1}| - \{|U_{n+2}| - |U_{n+3}|\} - \{|U_{n+4}| - |U_{n+5}|\} + \dots$ (95)

Всѣ слагаемыя въ формулѣ (94) вслѣдствіе условія (93) положительны, отсюда имѣемъ.

$$R_n > 0.$$

На основаніи же формулы (95) и тѣхъ же неравенствъ: $R_n < |U_{n+1}|$,

Слѣдовательно,

$$|U_{n+1}| > R_n > 0,$$

такъ что R_n всегда положительно и всегда заключается между нулемъ и другимъ положительнымъ числомъ $|U_{n+1}|$, которое при неограниченномъ увеличеніи n тоже приближается къ нулю. Отсюда мы заключаемъ, что и R_n должно стремиться къ нулю $\lim_{n=\infty} R_n = 0$

Итакъ, если члены ряда попеременно положительны и отрицательны и по абсолютной величинѣ уменьшаются, то такой рядъ будетъ сходящійся.

Иногда для опредѣленія сходимости ряда сравниваютъ его съ другимъ рядомъ, сходимость котораго извѣстна.

Пусть даны два ряда:

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots\dots,$$

$$T = v_1 + v_2 + v_3 + \dots\dots;$$

положимъ, что, начиная съ нѣкотораго мѣста, члены ихъ положительны и каждый членъ v_ν больше соотвѣтственнаго u_ν или въ крайнемъ случаѣ равенъ ему:

$$v_\nu \geqq u_\nu.$$

Пусть, кромѣ того дано, что рядъ T сходящійся. Докажемъ, что въ такомъ случаѣ и рядъ S также сходящійся. Съ этою цѣлью разложимъ каждый рядъ на сумму

n первыхъ членовъ и остаточный членъ:

$$S = S_n + R_n,$$
$$T = T_n + U_n,$$

причемъ $R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots\ldots$

$$U_n = v_{n+1} + v_{n+2} + v_{n+3} + \ldots\ldots$$

На основаніи условія (96), если n выбирается только достаточно большимъ, можемъ написать слѣдующій рядъ неравенствъ.

$$u_{n+1} \leqq v_{n+1}.$$
$$u_{n+2} \leqq v_{n+2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Складывая ихъ, получимъ: $R_n \leqq U_n$.

Предѣлъ U_n, вслѣдствіе сходимости ряда T, равенъ нулю, слѣдовательно, такъ какъ R_n заключается между нулемъ и U_n, то и

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0.$$

Итакъ, предѣлъ остаточнаго члена ряда S равенъ нулю, слѣдоват., рядъ этотъ долженъ быть сходящійся. Съ другой стороны, очевидно, что если второй рядъ расходящійся, и члены его меньше членовъ перваго ряда, то и первый рядъ будетъ расходящійся.

На этомъ основана <u>теорема Коши (Cauchy)</u>:

<u>Когда начиная съ нѣкотораго мѣста ряда, состоящаго изъ положительныхъ членовъ, отношеніе каждаго члена къ своему предыдущему не превышаетъ нѣкотораго количества, меньшаго единицы, то рядъ сходящійся</u>

Пусть такой рядъ:

Тогда по предположенію, начиная съ нѣкотораго члена ряда $u_1 + u_2 + u_3 + \dots\dots$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq k < 1 \text{ - - - - - - (97).}$$

Докажемъ, что данный рядъ сходящійся.

Остаточный членъ ряда есть:

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} - - - - - -$$

На основаніи условія (97), имѣемъ слѣдующій рядъ неравенствъ:

$$u_{n+1} = u_{n+1}.$$

$$u_{n+2} \leqq k . u_{n+1}.$$

$$u_{n+3} \leqq k\, u_{n+2} \leqq k^2 . u_{n+1}.$$

$$u_{n+4} \leqq k . u_{n+3} \leqq k^3 . u_{n+1}$$

- - - - - - - - - - - - - - -

Отсюда $R_n \leqq u_{n+1}(1 + k + k^2 + k^3 + \dots)$.

Но такъ какъ $k < 1$, то выраженіе въ скобкахъ представляетъ сумму членовъ убывающей геометрической прогрессіи, которая по стр. 264 равна $\frac{1}{1-k}$, а потому

$$R_n \leqq \frac{u_{n+1}}{1-k}.$$

При безконечномъ увеличеніи n, правая часть неравенства стремится къ нулю, отсюда

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0,$$

вслѣдствіе чего данный рядъ въ самомъ дѣлѣ сходящійся.

Относительно знакоперемѣннаго ряда, т.е. ряда, члены котораго не имѣютъ всѣ одинъ и тотъ же знакъ, докажемъ еще одно условіе сходимости. Знакоперемѣнный рядъ сходящійся, если рядъ об=

абсолютныхъ значенiй его членовъ сходящiйся.
Пусть данъ знакоперемѣнный рядъ:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots\dots \quad ------(98)$$

Возьмемъ рядъ абсолютныхъ значенiй u_n

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots\dots = S_n + U_n, \quad ---(99).$$

причемъ $U_n = |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + |u_{n+3}| + \dots\dots$

Если рядъ (99) сходящiйся, то U_n при безконечномъ увеличенiи n приближается къ нулю, т.е. U_n можетъ быть сдѣлано меньше произвольно-малой величины α. Если теперь нѣкоторые изъ слагаемыхъ дѣлаются отрицательны, то сумма ихъ по абсолютной величинѣ можетъ только уменьшаться. Слѣдовательно, если мы замѣнимъ члены ряда (99) членами ряда (98), то сумма ихъ уменьшится по абсолютной величинѣ; отсюда

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0,$$

т.е. рядъ (98) также сходящiйся.

Пользуясь этою теоремою, можно распространить теорему Коши и на знакоперемѣнный рядъ. Кромѣ теоремы Коши существуютъ еще другiя теоремы о сходимости рядовъ, но всѣ онѣ даютъ только достаточныя условiя сходимости, а не необходимыя.

Теорема Ролле (Rolle) и теорема о среднемъ значенiи функцiи.

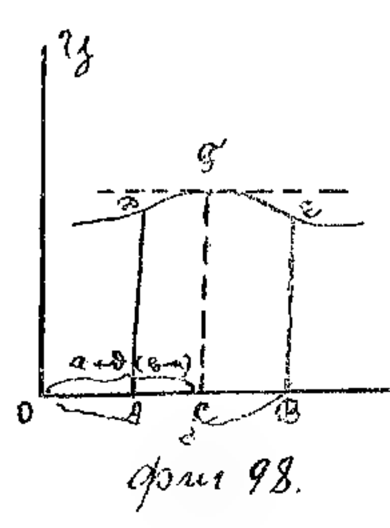
Пусть дана функцiя $\varphi(x)$, однозначная

непрерывная и конечная въ промежуткѣ отъ a до b и имѣющая въ этомъ промежуткѣ производную $\varphi'(x)$, которая однозначна и непрерывна. Если тогда $\varphi(a)=\varphi(b)$, то въ этомъ промежуткѣ имѣется такое значеніе x, для котораго производная равна нулю: $\varphi'(x)=0$.

Какъ извѣстно, $\varphi'(x)=\lim_{\Delta x=0}\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}$ (100)

Если функція возрастаетъ, то каждое слѣдующее значеніе ея больше предыдущаго, т. е. $\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)>0$; такъ какъ при возрастаніи x, $\Delta x>0$, то въ такомъ случаѣ и $\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}>0$, что справедливо при произвольно-маломъ Δx. Поэтому, на основаніи ур-я (100), въ случаѣ возрастанія функціи, первая производная ея положительна. Подобными же заключеніями мы находимъ, что въ случаѣ убыванія функціи ея первая производная меньше нуля.

Положимъ, что въ точкѣ $x=a$ функція возрастаетъ. Такъ какъ $\varphi(a)=\varphi(b)$ и, слѣдоват., въ точкѣ $x=b$ функція опять получаетъ первоначальное значеніе, то необходимо, чтобы съ какого-нибудь мѣста въ промежуткѣ отъ a до b функція опять убывала. Тогда, по только что изложенному, первая производная сначала положительна, потомъ отрицательна и такъ какъ она по предположенію непрерывна, то въ нашемъ промежуткѣ существуетъ по крайней мѣрѣ



Фиг 98.

одна точка, въ которой она изъ положительной участкой отрицательной, т. е. проходитъ черезъ значенiе 0. Къ такому же заключенiю мы пришли бы, если-бы функцiя въ точкѣ $x=a$ убывала. Такимъ образомъ, если $\varphi(a)=\varphi(b)$, то для x всегда можно найти такое значенiе между a и b.

$x=a+\Theta(b-a)$, (гдѣ Θ положительная правильная дробь), что

$$\varphi'(a+\Theta(b-a))=0.$$

Какъ извѣстно, $\varphi'(x)$ выражаетъ tg угла наклоненiя касательной кривой $y=\varphi(x)$ въ точкѣ (x, y). По теоремѣ Ролле, если $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ обладаютъ указанными свойствами, то существуетъ всегда касательная въ промежуткѣ отъ a до b, параллельная къ $X^{ов}$

На теоремѣ Ролле основана болѣе общая теорема, — такъ называемая теорема о среднемъ значенiи функцiи.

Если дана функцiя $f(x)$, однозначная, непрерывная и конечная въ промежуткѣ отъ a до b и имѣющая производную однозначную и непрерывную, то

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'[a+\vartheta(b-a)] \text{ - - - - - } (10).$$

причемъ ϑ положительная, правильная дробь.

$$0\leqq\vartheta\leqq1.$$

Если функція въ данномъ промежуткѣ непрерывна, конечна и однозначна, то ясно, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=k, \quad ---- (102)$$

т. е. равняется нѣкоторому опредѣленному количеству k. Найдемъ значеніе этой величины k. Уничтожая знаменатель въ ур-іи (102), получаемъ.

$$f(b)-f(a)=kb-ka$$

или

$$f(b)-kb=f(a)-ka \quad --- (103).$$

Теперь разсмотримъ слѣдующую функцію

$$\varphi(x)=f(x)-kx \quad ---- (104)$$

Если подставить частныя значенія $x=a$ и $x=b$, то получимъ:

$$\varphi(a)=f(a)-ka$$

$$\varphi(b)=f(b)-kb.$$

Тогда по ур-ію (103), $\varphi(a)=\varphi(b)$.

Въ такомъ случаѣ, по формулѣ Ролле, должно существовать такое значеніе x, между a и b, для котораго $\varphi'(x)=0$.

$$\varphi'[a+\vartheta(b-a)]=0 \quad ---- (105).$$

Но изъ ур-ія (104) имѣемъ:

$$\varphi'(x)=f'(x)-k.$$

Сопоставляя это ур-іе съ ур-іемъ (105), находимъ:

$$f'[a+\vartheta(b-a)]-k=0.$$

Отсюда

$$k=f'[a+\vartheta(b-a)]$$

Если это значеніе k подставить въ уравненіе (102), то мы получимъ уравненіе, которое

требовалось доказать.

Опредѣлимъ геометрическое значеніе этого ур-ія (101). Пусть DE будетъ кривая, изображающая данную функцію $f(x)$

Фиг. 99.

Тогда $AD = f(a)$
$BE = f(b)$

Проведя затѣмъ черезъ D параллель къ оси $x^{\text{овъ}}$ находимъ:

$GE = BE - BG = BE - AD = f(b) - f(a)$.

Откуда $\frac{GE}{GD} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = tg\gamma$.

Мы знаемъ, что геометрическое значеніе производной есть tg угла τ наклоненія касательной къ оси $x^{\text{овъ}}$. По доказанной теоремѣ, существуетъ нѣкоторое значеніе x между a и b, для котораго $tg\,\tau = tg\,\gamma$, т. е. существуетъ точка между D и E, касательная которой параллельна хордѣ DE.

Разложеніе функцій въ ряды Вды Тайлора и Маклорена. Разложеніе e^x.

Возьмемъ частный примѣръ разложенія функцій въ рядъ. Пусть дана функція $(a+x)^3$, которую требуется разложить по восходящимъ степенямъ x.

$$(a+x)^3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \dots \quad (106),$$

т. е. требуется расположить коэффиціенты такимъ образомъ, чтобы это равенство было справедливо для всѣхъ значе-

ній x, или, чтобы функція лѣвой части была только функціею видомъ функціи правой части. Если функціи тѣ же самыя, то и производныя ихъ равны, поэтому, дифференцируя нѣсколько разъ имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} 3(a+x)^2 &= a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4+\ldots \\ 6(a+x) &= 2a_2+6a_3x+12a_4x^2+20a_5x^3+\ldots\ldots \\ 6 &= 6a_3+24a_4x+60a_5x^2+\ldots\ldots \\ 0 &= 24a_4+120a_5x+\ldots\ldots \\ 0 &= 120a_5+x(\ldots\ldots) \end{aligned}\right\}\ldots(107).$$

Подставляя значеніе $x=0$ въ ур-ія (106) и (107), получаемъ:

$$a^3=a_0$$
$$3a^2=a_1$$
$$6a=2a_2$$
$$6=6a_3$$
$$0=24a_4=120a_5=\ldots$$

Рѣшая эти ур-ія относительно коэффиціентовъ разложенія (106), находимъ:

$$a_0=a^3.$$
$$a_1=3a^2$$
$$a_2=3a.$$
$$a_3=1.$$
$$a_4=a_5=a_6=\ldots\ldots=0.$$

Если подставить эти значенія коэффиціентовъ во ур-іе (106), то получимъ:

$$(a+x)^3=a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$$

Всѣ остальные члены равны нулю.

Изъ этого частнаго примѣра мы видимъ, что существуютъ функціи, которыя можно разложить въ ряды по восходящимъ степенямъ x

Возьмемъ теперь функцію $f(a+x)$. Предположимъ, что эту функцію можно разложить въ рядъ по восходящимъ степенямъ x, т.е. существуетъ такой рядъ, что

$$f(a+x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots \quad ---(108).$$

Чтобы опредѣлить значеніе коэффиціентовъ, дифференцируемъ выраженіе (108):

$$f'(a+x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\ldots\ldots$$

$$f''(a+x)=2a_2+3\cdot 2a_3x+4\cdot 3a_4x^2+\ldots\ldots$$

$$f'''(a+x)=3\cdot 2a_3+4\cdot 3\cdot 2\,a_4x+\ldots\ldots$$

$$f^{IV}(a+x)=4\cdot 3\cdot 2a_4+x(\ldots\ldots)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^n(a+x)=n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 2a_n+x(\ldots)$$

Подставимъ въ ур-іе (108) и въ послѣдующ[ія] частное значеніе $x=0$.

$$f(a)=a_0$$

$$f'(a)=a_1.$$

$$f''(a)=2a_2$$

$$f'''(a)=3\cdot 2a_3$$

$$f^{IV}(a)=4\cdot 3\cdot 2a_4$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^n(a)=n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 2a_n.$$

Рѣшая эти ур-ія относительно коэффиціентовъ, получаемъ:

$$a_0=f(a)$$

$$a_1=f'(a).$$

$$a_2=\frac{f''(a)}{2}=\frac{f''(a)}{1\cdot 2}=\frac{f''(a)}{2!}$$

$$a_3=\frac{f'''(a)}{3!}$$

$$a_4=\frac{f^{IV}(a)}{4!}$$

$$\ldots\ldots$$

$$a_n=\frac{f^n(a)}{n!}$$

Если подставимъ найденныя значенія коэф-

фициентовъ въ ур-іе (109), то получимъ искомое разложеніе

$$f(a+x)=f(a)+xf'(a)+\frac{x^2}{2!}f''(a)+\frac{x^3}{3!}f'''(a)+\dots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(a)+\dots \quad (109).$$

Эта формула носитъ названіе ряда Тайлора (Taylor). Указанное разложеніе функціи въ рядъ не всегда возможно. Такъ какъ для разложенія функціи необходимо найти производныя, то, слѣдовательно, функція должна быть непрерывна и имѣть производныя всѣхъ порядковъ. Кромѣ того, рядъ, на который разлагается функція, долженъ быть сходящійся. Если придать въ строкѣ (109) для a частное значеніе $a=0$, то получимъ частный видъ ряда Тайлора, носящій названіе ряда Макъ-Лорена (Mac-Laurin):

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\dots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\dots \quad (110).$$

Воспользуемся этою формулою для разложенія $f(x)=e^x$

Производныя этой функціи, какъ извѣстно, суть:

$$f'(x)=f''(x)=\dots\dots=e^x.$$

Чтобы разложить нашу функцію по формулѣ (110), придадимъ x частное значеніе $x=0$.

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\dots\dots=1.$$

Отсюда по формулѣ (110)

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots \quad (111).$$

Мы получили безконечный рядъ, и разложеніе справедливо только въ томъ случаѣ, если этотъ рядъ сходящійся. Для опредѣленія сходимости ряда, воспользуемся п.10=

ремою Коши (стр. 269), по которой рядъ будетъ сходящійся, если

$$\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} < 1.$$

для всѣхъ значеній n, начиная съ нѣкотораго числа. Это отношеніе можно представить въ видѣ:

$$\frac{x^{n+1} \cdot n!}{(n+1)\, x^n} = \frac{x}{n+1}.$$

Съ увеличеніемъ числа n дробь, очевидно, уменьшается и, при достаточно большомъ n, можетъ быть сдѣлана меньше единицы при всякомъ конечномъ значеніи x, слѣд., рядъ (111) сходящійся для всѣхъ конечныхъ значеній x, а именно: по теоремѣ на стр 271 для всѣхъ положительн. и отрицат. конечныхъ значеній x.

Какъ частный примѣръ такого разложенія возьмемъ строку (111) для частнаго значенія $x=1$; въ такомъ случаѣ получимъ:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots\ldots$$

$1+1 = 2{\cdot}00000$	$\frac{1}{5!} = 0{\cdot}00833.$
$\frac{1}{2!} = 0{\cdot}50000.$	$\frac{1}{6!} = 0{\cdot}00139.$
$\frac{1}{3!} = 0{\cdot}16667.$	$\frac{1}{7!} = 0{\cdot}00020.$
$\frac{1}{4!} = 0{\cdot}04167.$	$\frac{1}{8!} = 0{\cdot}00002.$

$$e = 2{\cdot}71828.$$

На этомъ частномъ примѣрѣ мы видимъ, какъ можно пользоваться рядами для вычисленія функціи по данному аргументу: но это вычисленіе производится лишь съ нѣкоторою точностью. Важно опредѣлить ту точность, кото=

рой мы можемъ достигнуть при подобномъ вычисленіи. Называя сумму членовъ, слѣдующихъ за $n+1$-мъ черезъ R_n, можемъ написать:

$$f(a+x)=f(a)+\frac{x}{1}f'(a)+\frac{x^2}{2!}f''(a)+\ldots\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n \quad (112).$$

Спрашивается, какъ велика R_n, т. е. какъ велика погрѣшность, если при вычисленіи $f(a+x)$, ограничиваться членами разложенія только до $\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(a)$ включительно. Для рѣшенія этого вопроса возьмемъ выраженіе

$$R=\frac{f(b)-f(a)-\frac{b-a}{1}f'(a)-\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)-\ldots\ldots-\frac{(b-a)^n}{n!}f^n(a)}{(b-a)^{n+1}}, \quad (113)$$

гдѣ R очевидно нѣкоторая постоянная величина, такъ какъ въ правой части всѣ члены постоянные.

Разсмотримъ теперь функцію:

$$\Phi(x)=f(b)-f(x)-\frac{b-x}{1}f'(x)-\frac{(b-x)^2}{2!}f''(x)\ldots\ldots-\frac{(b-x)^n}{n!}f^n(x)-(b-x)^{n+1}R \quad (114)$$

Замѣняя x черезъ a, получаемъ:

$$\Phi(a)=f(b)-f(a)-\frac{b-a}{1}f'(a)-\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)\ldots\ldots-\frac{(b-a)^n}{n!}f^n(a)-(b-a)^{n+1}R \quad (115).$$

Сравнивая это выраженіе съ ур-іемъ (113), видимъ, что

$$\Phi(a)=0.$$

Подставляя въ ур-іе (114) $x=b$, получимъ также

$$\Phi(b)=0.$$

Отсюда слѣдуетъ

$$\Phi(a)=\Phi(b)=0$$

Въ такомъ случаѣ, по теоремѣ Ролле (стр. 272), должно существовать также значеніе x между a и b, что $\Phi'(x)=0$.

Опредѣлимъ эту производную изъ ур-ія

(114):

$$\Phi'(x) = -f'(x) + f'(x) - \frac{b-x}{1} f''(x) + \frac{b-x}{1} f''(x) - \frac{(b-x)^2}{2!} f'''(x) +$$
$$+ \frac{(b-x)^2}{2!} f'''(x) + \cdots + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n}(x) - \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) +$$
$$+ (n+1)(b-x)^n R.$$

По сокращеніи получимъ:

$$\Phi'(x) = -\frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) + (n+1)(b-x)^n R.$$

Обозначимъ то значеніе x, для котораго $\Phi'(x) = 0$, черезъ ξ; тогда находимъ:

$$-\frac{(b-\xi)^n}{n!} f^{n+1}(\xi) + (n+1)(b-\xi)^n R = 0$$

Сократимъ на $(b-\xi)^n$:

$$-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} + (n+1) R = 0.$$

Отсюда $$R = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Такъ какъ ξ больше a и меньше b, то, принявъ ϑ за нѣкоторую правильную положительную дробь, будемъ имѣть

$$R = \frac{f^{n+1}[a + \vartheta(b-a)]}{(n+1)!}$$

Если подставить это значеніе R въ ур-іе (115), то, принимая во вниманіе, что $\Phi(a) = 0$, получимъ:

$$f(b) - f(a) - \frac{(b-a)}{1} f'(a) - \cdots - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) - \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}[a+\vartheta(b-a)] = 0.$$

Если въ ур-іе (114) вмѣсто x подставить b, a, то получимъ:

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1} f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{n}(a) + R_n$$

Сравнивая два послѣднія ур-ія, находимъ

$$R_n = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}[a + \vartheta(b-a)],$$

такъ называемый остаточный членъ ряда Тайлора въ формѣ Лагранжа (Лагранж...

Обозначая $(b-a)$ опять черезъ x, получимъ

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\vartheta x)$$

Такъ что для конечнаго числа членовъ формула Тайлора принимаетъ видъ:

$$f(a+x) = f(a) + x f'(a) + \frac{x^2}{2!} f''(a) + \frac{x^3}{3!} f'''(a) + \dots\dots +$$
$$+ \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\vartheta x) \text{ --- } (116).$$

Если полагать $a=0$, то получимъ формулу Маклорена:

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3} f'''(0) + \dots\dots +$$
$$+ \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\vartheta x) \text{ --- } (117).$$

Чтобы данную функцію разложить по этимъ формуламъ, необходимо только, чтобы она имѣла производныя до порядка $n+1$ включительно. Мы уже нашли разложеніе функціи e^x въ рядъ (111). Если ограничиться конечнымъ числомъ членовъ и пользоваться выраженіемъ для остаточнаго члена, то это разложеніе принимаетъ видъ:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\vartheta x}.$$

Этою формулою можно пользоваться для опредѣленія точности, при ограниченіи конечнымъ числомъ членовъ. Полагая, напр., $x=1$, получимъ:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} e^{\vartheta} \text{ --- } (118).$$

По стр. 199 $e<4$, слѣдовательно, т. к. ϑ правильная дробь, то

$$\frac{e^{\vartheta}}{(n+1)!} < \frac{4}{(n+1)!}$$

Въ нашемъ вычисленіи (стр. 279), мы взяли $n=8$ слѣдовательно, погрѣшность, получаемая

при этомъ, будетъ:

$$R_8 < \frac{4}{9!} = 0{,}00001.$$

Разложение тригонометрическихъ функцій

Пусть требуется разложить въ рядъ функцію $f(x) = \sin x$.

Найдемъ рядъ ея производныхъ:

$f(x) = \sin x.$ $\quad f(0) = 0.$

$f'(x) = \cos x.$ $\quad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x.$ $\quad f''(0) = 0.$

$f'''(x) = -\cos x.$ $\quad f'''(0) = -1.$

$f^{IV}(x) = \sin x$ $\quad f^{IV}(0) = 0$

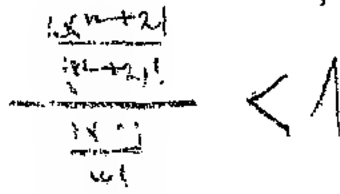
. . . .

Для разложенія по формулѣ Маклорена полагаемъ $x = 0$.

если подставимъ эти значенія въ формулу Маклорена, то получимъ:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (119)$$

Sin x имѣетъ безконечное число производныхъ, слѣдоват., число членовъ разложенія будетъ безконечно-велико. Отсюда, для опредѣленія этой функціи, можно воспользоваться формулою Маклорена для безконечнаго числа членовъ. Но предварительно надо опредѣлить сходимость ряда. $n^{ый}$ членъ нашего ряда будетъ $\frac{x^n}{n!}$, а слѣдующій за нимъ $\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}$; слѣдовательно, по теоремѣ Коши и по теоремѣ на стр. 271, рядъ будетъ сходящійся, при условіи:



$$\frac{\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}}{\frac{x^n}{n!}} < 1$$

Но $\frac{\frac{|x^{n+2}|}{(n+2)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{|x^{n+2}| \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n(n+1)(n+2)\,|x^n|} = \frac{|x^2|}{(n+1)(n+2)}$.

Съ увеличеніемъ n знаменатель увеличивается и, при достаточно большомъ n, дробь всегда меньше 1. Слѣдовательно, данный рядъ сходящійся при всѣхъ конечныхъ положительныхъ и отрицательныхъ значеніяхъ x. Вычислимъ функцію $\sin x$ для частнаго значенія $x=1=\text{arc}\, 57^\circ 17' 44''8$, для чего подставимъ это значеніе въ ур-іе (44). Тогда члены получаютъ слѣдующую числовую величину.

$x = 1{,}0000000$ $\qquad$ $\frac{x^3}{3!} = 0{,}1666667$

$\frac{x^5}{5!} = 0{,}0083333$ $\qquad$ $\frac{x^7}{7!} = 0{,}0001984$

$\frac{x^9}{9!} = 0{,}0000028$ $\qquad$ $0{,}1668651$

$$\begin{array}{r} 1{,}0083361 \\ -0{,}1668651 \\ \hline 0{,}8414710 \end{array}$$

$\sin 1 = \sin 57^\circ 17' 44'' = 0{,}8414710.$

Чтобы опредѣлить точность вычисленія, пользуемся выраженіемъ остаточнаго члена ряда Тайлора.

Такъ какъ по стр. 245

$$f^{n+1}(x) = \sin\left(x + \frac{n+1}{2}\pi\right),$$

то отсюда остаточный членъ будетъ:

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sin\left(\vartheta x + \frac{n+1}{2}\pi\right).$$

Значеніе $\sin$ заключается между $+1$ и -1, отсюда

$$|R_n| \leq \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}$$

Въ нашемъ случаѣ

$$(R_9) \leqq \frac{1}{10!} = 0{,}0000003,$$

т. е. результатъ нашего вычисленія получился съ точностью до одной милліонной. Также легко опредѣлить формулу разложенія функціи $\cos x$.

$f(x) = \cos x$ полагая $x=0$: $f(0)=1$.

$f'(x) = -\sin x$. $f'(0)=0$.

$f''(x) = -\cos x$ $f''(0)=-1$.

$f'''(x) = \sin x$. $f'''(0)=0$.

$f^{IV}(x) = \cos x$. $f^{IV}(0)=1$.

. . . .

Подставляя эти значенія въ формулу (110), получаемъ:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \quad (120).$$

Легко убѣдиться, что рядъ будетъ сходящійся для всѣхъ значеній x. Производная $(n+1)^{ая}$ по стр. 245:

$$f^{n+1}(x) = \cos\left(x + \frac{n+1}{2}\pi\right),$$

такъ что остаточный членъ:

$$R_n = \cos\left(\vartheta x + \frac{n+1}{2}\pi\right).$$

Разложеніе логарифмической функціи.

Пусть дана функція $f(x) = \ln(1+x)$.
Найдемъ ея производныя:

$f(x) = \ln(1+x)$. $f(0) = \ln 1 = 0$.

$f'(x) = \frac{1}{1+x}$. при $x=0$. $f'(0) = 1$.

$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ $f''(0) = -1$.

$f'''(x) = \frac{2!}{(1+x)^3}$ $f'''(0) = 2!$

$f^{IV}(x) = \frac{-3!}{(1+x)^4}$ $\qquad f^{IV}(0) = -3!$

. . . .

$f^n(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ $\qquad f^n(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$

Подставляемъ въ формулу Маклорена:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots \quad (121).$$

Найдемъ по теоремѣ Коши (стр. 269), для какихъ значеній x рядъ абсолютныхъ величинъ членовъ будетъ сходящійся, для чего опредѣляемъ отношеніе:

$$\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}} = \frac{n}{n+1}x = \frac{x}{1+\frac{1}{n}}.$$

Съ увеличеніемъ n, знаменатель послѣдней дроби приближается къ единицѣ; значитъ, если $|x| < 1$, то рядъ будетъ сходящійся, т. е. $(1+x)$ должно имѣть значеніе между 0 и 2.

Разложимъ теперь функцію $\ln(1-x)$, для чего въ формулѣ (121) замѣнимъ x на $-x$:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \dots \quad (122).$$

и вычтемъ ур-іе (122) изъ ур-ія (121):

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2x + 2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{5} + \dots$$

Отсюда $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots\right)$ – (123).

Опредѣлимъ опять то значеніе x, для котораго полученный рядъ будетъ сходящійся.

$$\frac{\frac{x^{n+2}}{n+2}}{\frac{x^n}{n}} = \frac{n}{n+2}x^2 = \frac{x^2}{1+\frac{2}{n}}.$$

Съ увеличеніемъ n знаменатель дроби приближается къ 1; слѣдоват., рядъ будетъ схо=

дящійся, при условіи

$|x|<1$.

Если требуется по формулѣ (123) опредѣлить ℓg какого-нибудь числа k, то имѣемъ ур-іе

$$\frac{1+x}{1-x}=k.$$

Откуда $x=\frac{k-1}{k+1}$. — — — — (124)

Дѣйствительное значеніе логарифма можетъ получиться только, если $|x|<1$, т.е., если дробь (124) правильная, что, очевидно, произойдетъ при всякомъ положительномъ значеніи k; т.е. мы можемъ вычислить по формулѣ (123) ℓog какого-угодно числа.

Пусть, напр., $k=3$, тогда $x=\frac{3-1}{3+1}=\frac{1}{2}$. Подставивъ значеніе x въ формулу (123), находимъ:

$x=0{,}5000000$ $\qquad \frac{x^{11}}{11}=0{,}0000044$.

$\frac{x^3}{3}=0{,}0416667$. $\qquad \frac{x^{13}}{13}=0{,}0000094$.

$\frac{x^5}{5}=0{,}0062500$ $\qquad \frac{x^{15}}{15}=0{,}0000021$.

$\frac{x^7}{7}=0{,}0011161$. $\qquad \frac{x^{17}}{17}=0{,}0000004$.

$\frac{x^9}{9}=0{,}0002170$.

$$\frac{1}{2}\ell n3=0{,}5493061.$$

$$\ell n3=1{,}0986122.$$

Распространеніе бинома Ньютона на дробные и отрицательные показатели.

Въ элементарной математикѣ доказывается слѣдующая формула, извѣстная подъ названіемъ бинома Ньютона:

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots mx^{m-1}+x^m,$$

гдѣ μ цѣлое положительное число.
Эту формулу можно распространить и на случай дробныхъ и отрицательныхъ показателей.
Пусть дана функція:

$$f(x) = (1+x)^{\mu} \text{ - - - - - - - } (125).$$

гдѣ μ произвольное постоянное число.
Диффиренцируя ур-е (125), получимъ:

$$f(x) = (1+x)^{\mu} \qquad f(0) = 1.$$
$$f'(x) = \mu(1+x)^{\mu-1} \quad \text{при } x=0 \quad f'(0) = \mu.$$
$$f''(x) = \mu(\mu-1)(1+x)^{\mu-2} \qquad f''(0) = \mu(\mu-1).$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$
$$f^{n}(x) = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)x^{\mu-n} \qquad f^{n}(0) = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1).$$

Подставляемъ полученныя значенія въ формулу Маклорена (110).

$$(1+x)^{\mu} = 1+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots+\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}x^n \text{ -- } (126).$$

Очевидно, это та же формула Ньютона, но число членовъ за исключеніемъ случая, что μ цѣлое положительное число, безконечно велико. Чтобы опредѣлить, для какихъ значеній x полученный рядъ будетъ сходящійся, разсмотримъ отношеніе $(n+1)^{\text{го}}$ члена къ $n^{\text{му}}$

$$\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)(\mu-n)x^{n+1}}{1\cdot 2\ldots n(n+1)}\cdot\frac{1\cdot 2\ldots n}{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)x^{n}} =$$

$$= \frac{\mu-n}{n+1}x = \frac{\frac{\mu}{n}-1}{1+\frac{1}{n}}x \text{ - - - - - } (127).$$

При безконечномъ увеличеніи n, коэффиціентъ x по абсолютной величинѣ приближается къ 1, т.е. вся величина (127) приближается къ x, а такъ какъ она должна быть меньше единицы, чтобы рядъ былъ

сходящійся, то условіемъ сходимости является: $(x) < 1$

Формулою (126) можно воспользоваться для вычисленія корней; напр.

$\sqrt[3]{130} = (130)^{1/3} = (125+5)^{1/3} = \left[125\left(1+\frac{5}{125}\right)\right]^{\frac{1}{3}} = 5$

$(1+0{,}04)^{1/3}$. Въ скобкахъ мы получимъ выраженіе вида $1+x$, причемъ x значительно меньше 1. Опредѣлимъ теперь $(1+0{,}04)^{1/3}$ по формулѣ (126)

$$1 = 1{,}000000$$
$$mx = 0{,}013333$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)x^3}{1.2.3} = 0{,}0000040 \qquad \frac{n(n-1)x^2}{1.2} = -0{,}0001778$$

$$1{,}0133373$$
$$-\ 0{,}0001778$$
$$(1+0{,}04)^{1/3} = 1{,}0131595$$

$\sqrt[3]{130} = 5(1+0{,}04)^{1/3} = 5{,}0657975$

<u>Опредѣленіе истиннаго значенія выраженій неопредѣленнаго вида</u>

Пусть намъ дана функція, имѣющая видъ частнаго двухъ другихъ функцій $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ . . . . . (128)

Если существуетъ такое частное значеніе аргумента $x=a$, что одновременно $\varphi(a)=0;\ \psi(a)=0$ . . . . (129) то подставивъ это значеніе въ ур-іе (128) получимъ: $f(a) = \frac{0}{0}$ выраженіе неопредѣленное. Если x измѣняясь непрерывно, принимаетъ значеніе $x=a$, то дробь $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ можетъ стремиться къ нѣкоторому предѣлу. Тогда этотъ пред. наз. истиннымъ значеніемъ $f(x)$ въ

точка a.

Для отыскания этого предела, придадим количеству a положительное приращение h; тогда имеем:

$$f(a+h) = \frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)}$$

Так как $\varphi(a)$ и $\psi(a)$ равны нулю, то можно не изменяя, если вычесть эти величины из числителя и знаменателя

$$f(a+h) = \frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{\psi(a+h)-\psi(a)} = \frac{\frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{h}}{\frac{\psi(a+h)-\psi(a)}{h}}$$

Переходя к пределу $h=0$, в левой части получим $f(a)$; предел правой части равен частному пределов числителя и знаменателя. Последние суть, очевидно, производные рассматриваемых функций.

$$\lim_{h=0} \frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{h} = \varphi'(a) = [\varphi'(x)]_{x=a}$$

$$\lim_{h=0} \frac{\psi(a+h)-\psi(a)}{h} = \psi'(a) = [\psi'(x)]_{x=a}$$

Итак $f(a) = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)} = \left[\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}\right]_{x=a}$ (130)

т.е. неопределенность $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ в том случае, когда $\varphi(a)=0$ и $\psi(a)=0$ определяется частным производных числителя и знаменателя для значения $x=a$.

Примеры. Пусть требуется определить значение при $x=1$

$$f(x) = \frac{3x^2-7x+4}{x^2+x-2} \quad (131)$$

при $x=1$. Мы получаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Поэтому, дифференцируя числитель и знаменатель, находим по формуле (130)

$$f(1) = \left[\frac{6x-7}{2x+1}\right]_{x=1} = -\frac{1}{3}.$$

Разложивши числитель и знаменатель дроби (131) на множители:

$$f(x) = \frac{(x-1)(3x-4)}{(x-1)(x+2)}$$

мы замечаемъ, что неопределенность происходитъ вследствие того, что числитель и знаменатель содержатъ одного и того же множителя $x-1$, который при $x=1$ обращается въ 0. Если предварительно сократить дробь на этого множителя:

$$f(x) = \frac{3x-4}{x+2}$$

то въ точке $x=1$ не встречается никакой неопределенности, и мы прямо получаемъ: $f(1) = -\frac{1}{3}$

Можетъ случиться, что первыя производныя разсматриваемыхъ функций равны порознь нулю; тогда опять получаемъ неопределенное выражение $\frac{0}{0}$. Въ такомъ случае применяемъ вторично наше правило, т. е. находимъ вторыя производныя данныхъ функций

$$f(a) = \left[\frac{\varphi''(a)}{\psi''(a)}\right]_{x=a}$$

Если же и въ этомъ случае получимъ выражение $\frac{0}{0}$, то для определения истиннаго значения $f(a)$ дифференцируемъ еще разъ и т. д. пока не дойдемъ до производныхъ одинаковаго порядка, которыя одновременно не равны нулю. Это можно доказать при помощи ряда Тейлора. Пусть функции $\varphi(a)$ и $\psi(a)$ и производныя ихъ до $n-1^{го}$ порядка включительно рав-

ны нулю:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(a)=\varphi'(a)=\varphi''(a)=\dots\dots=\varphi^{(n-1)}(a)=0\\ \psi(a)=\psi'(a)=\psi''(a)=\dots\dots=\psi^{(n-1)}(a)=0\end{aligned}\right\}$$

Кромѣ того положимъ, что обѣ функціи имѣютъ еще въ точкѣ $x=a$ производныя $n^{го}$ порядка; тогда мы можемъ разложить въ рядъ Тайлора

$$f(a+h)=\frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)}=\frac{\varphi(a)+h\varphi'(a)+\frac{h^2}{2!}\varphi''(a)+\dots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(a)+\frac{h^n}{n!}\varphi^{(n)}(a+\vartheta h)}{\psi(a)+h\psi'(a)+\frac{h^2}{2!}\psi''(a)+\dots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\psi^{(n-1)}(a)+\frac{h^n}{n!}\psi^{(n)}(a+\vartheta_1 h)}$$

На основаніи условія (132) всѣ члены разложенія равные нулю за исключеніемъ послѣдняго. Отсюда слѣдуетъ, что

$$f(a+h)=\frac{\frac{h^n}{n!}\varphi^{(n)}(a+\vartheta h)}{\frac{h^n}{n!}\psi^{(n)}(a+\vartheta_1 h)}=\frac{\varphi^{(n)}(a+\vartheta h)}{\psi^{(n)}(a+\vartheta_1 h)} \quad (133)$$

Если при непрерывномъ измѣненіи x, h приближается къ нулю, то получимъ:

$$f(a)=\lim_{h=0}\frac{\varphi^{(n)}(a+\vartheta h)}{\psi^{(n)}(a+\vartheta_1 h)}=\frac{\varphi^{(n)}(a)}{\psi^{(n)}(a)}$$

Такимъ образомъ, если въ нѣкоторой точкѣ $x=a$ $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ и производныя ихъ до $n-1$ порядка включительно равны нулю, то $\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}$ равно частному $n^{хъ}$ производныхъ при $x=a$. Мы нашли, что въ нашемъ частномъ случаѣ причиною неопредѣленности является общій множитель, который образуется въ числителѣ и знаменателѣ. Изъ уравненія (133) вытекаетъ, что вообще всѣ неопредѣленности разсматриваемаго рода получаются отъ такого множителя, т. е. слѣдуетъ [illegible] въ общемъ случаѣ [illegible] h^n.

видъ $\frac{h}{n}$,

Примѣръ. Пусть требуется найти истинное значеніе выраженія: $f(x) = \frac{x - \sin x}{x^3}$ для значенія $x = 0$.

Если бы мы подставили въ это выраженіе значеніе a, то очевидно, получили бы выраженіе $\frac{0}{0}$. Поэтому дифференцируемъ числителя и знаменателя:

$$\left[\frac{x - \sin x}{x^3}\right]_{x=0} = \left[\frac{1 - \cos x}{3x^2}\right]_{x=0}$$

Подставляя сюда $x=0$, получаемъ опять $\frac{0}{0}$, вслѣдствіе чего дифференцируемъ еще разъ: $\left[\frac{1 - \cos x}{3x^2}\right]_{x=0} = \left[\frac{\sin x}{6x}\right]_{x=0} = \frac{0}{0}$

Наконецъ находимъ третью производную числителя и знаменателя $\left[\frac{\cos x}{6}\right]_{x=0} = \frac{1}{6}$

Слѣдовательно истинное значеніе нашей дроби есть $1/6$.

Если при частномъ значеніи $x=a$ обѣ функціи $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ въ выраженіи (128) дѣлаются безконечно большими

$$\varphi(a) = \infty, \ \psi(a) = \infty,$$

то получаемъ другой видъ неопредѣленнаго выраженія

$$f(a) = \frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{\infty}{\infty}$$

Для раскрытія неопредѣленности представимъ данную функцію въ другомъ видѣ: $f(a) = \left[\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]_{x=a} = \left[\frac{\frac{1}{\psi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}}\right]_{x=a}$

Теперь выраж. имѣетъ видъ $0/0$, поэтому дифференцируемъ числителя и знамен[illegible]

нашлись:

$$f(a)=\left[\frac{-\frac{\varphi'(x)}{(\varphi(x))^2}}{-\frac{\psi'(x)}{(\psi(x))^2}}\right]=\left[\frac{\varphi'(x)}{(\varphi(x))^2}\cdot\frac{(\psi(x))^2}{\psi'(x)}\right]_{x=a}=\left[\frac{f(x)}{\psi(x)}\right]^2_{x=a}\cdot$$

$$\left[\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x=a}$$ Такимъ образомъ

$$\left[\frac{f(x)}{\psi(x)}\right]_{x=a}=\left\{\left[\frac{f(x)}{\psi(x)}\right]_{x=a}\right\}^2\cdot\left[\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x=a}$$

Сокращая обѣ части на $\left[\frac{f(x)}{\psi(x)}\right]_{x=a}$, получимъ $1=\left[\frac{f(x)}{\psi(x)}\right]_{x=a}\left[\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x=a}$

Отсюда $\left[\frac{f(x)}{\psi(x)}\right]_{x=a}=\left[\frac{f'(x)}{\psi'(x)}\right]_{x=a}$

т. е. для опредѣленія значенія данной функціи надо, какъ и въ предъидущемъ случаѣ, найти производную числителя и раздѣлить ее на производную знаменателя

Примѣръ I $f(x)=\left[\frac{\ln x}{x}\right]_{x=\infty}=\frac{\infty}{\infty}$

Дифференцируемъ числитель и знаменатель:

$$f(\infty)=\left[\frac{\frac{1}{x}}{1}\right]_{x=\infty}=\left[\frac{1}{x}\right]_{x=\infty}=0$$

Истинное значеніе данной функціи равно нулю

Примѣръ II

$$\left[\frac{\ln x}{\operatorname{Ctg} x}\right]_{x=0}=\frac{\infty}{\infty}=\left[\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}\right]_{x=0}=\frac{\infty}{\infty}=-\left[\frac{\sin^2 x}{x}\right]_{x=0}=\frac{0}{0}$$

$$=-\left[\frac{2\sin x\cdot\operatorname{Cos} x}{1}\right]=0$$

Пусть дана функція, имѣющая видъ произ-
веденія двухъ другихъ функцій

$$f(x)=\varphi(x).\psi(x),$$

и положимъ, что для частнаго значенія
$x=a$ функціи получаютъ значенія

$$\varphi(a)=0;\ \psi(a)=\infty$$

Тогда функція $f(x)$ получаетъ неопре-
дѣленный видъ

$$f(a)=0\infty$$

Для вычисленія истиннаго значенія $f.$
можно привести эту неопредѣленность
къ виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ слѣдующимъ обра-
зомъ: $f(a)=\left[\varphi(x).\psi(x)\right]_{x=a}=\left[\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}}\right]_{x=a}=\frac{0}{0}$

$$f(a)=\left[\frac{\psi(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}\right]_{x=a}=\frac{\infty}{\infty}$$

Какъ раскрываются обѣ этого вида не-
опредѣленности, намъ извѣстно.

<u>Примѣръ.</u> $\left[x^{\alpha}\ln x\right]_{x=0}=0.\infty$, если α

Данную функцію можно преобразовать
слѣдующимъ образомъ:

$$\left[x^{\alpha}\ln x\right]_{x=0}=\left[\frac{\ln(x)}{x^{-\alpha}}\right]_{x=0}=\frac{\infty}{\infty}=\left[\frac{\frac{1}{x}}{-\alpha.x^{-\alpha-1}}\right]_{x=0}=\left[\frac{\frac{1}{x}x^{\alpha+1}}{-\alpha}\right]$$

$=-\frac{1}{\alpha}\left[x^{\alpha}\right]_{x=0}=0$ Разсмотримъ теперь
раскрытіе неопредѣленности, если
на функція равна разности двухъ функ-
изъ которыхъ каждая при $x=a$ обраща-
въ безконечность $f(x)=\varphi(x)-\psi(x)$
если $\varphi(a)=\infty$ и $\psi(a)\infty$, то $f(a)=\infty-\infty$
Преобразуя данную функцію, при-

ее опять къ виду $\frac{0}{0}$.

$$f(a)=\left[\varphi(x)-\psi(x)\right]_{x=a}=\left[\frac{\frac{1}{\psi(x)}-\frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)\cdot\psi(x)}}\right]_{x=a}=\frac{0}{0}$$

<u>Примѣръ</u> $\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]_{x=0}=\infty-\infty=$

$$=\left[\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\right]_{x=0}=\frac{0}{0}\left[\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}\right]_{x=0}=\left[\frac{x}{(1+x)\ln(1+x)+x}\right]_{x=0}=$$

$$=\frac{0}{0}=\left[\frac{1}{\ln(1+x)+\frac{1+x}{1+x}+1}\right]_{x=0}=\left[\frac{1}{\ln(1+x)+2}\right]_{x=0}=\frac{1}{2}$$

Положимъ теперь, что

$$f(x)=\varphi(x)^{\psi(x)}\ldots\ldots(134)$$

логарифмируя это выраженіе, получимъ:

$$\ln f(x)=\psi(x)\cdot\ln\varphi(x)$$

Отсюда, очевидно

$$e^{\ln f(x)}=e^{\psi(x)\cdot\ln\varphi(x)}\quad\text{но}\quad e^{\ln f(x)}=f(x)$$

слѣдовательно $f(x)=e^{\psi(x)\cdot\ln\varphi(x)}\ldots(135)$

Откуда ясно, что $f(x)$ будетъ имѣть неопредѣленный видъ, если показатель получитъ неопредѣленный видъ. Послѣднее произойдетъ въ томъ случаѣ, если одинъ изъ множителей сдѣлается безконечно-малымъ, а другой безконечно большимъ

Мы можемъ имѣть слѣдующіе три случая

1) $\ln f(x)=+\infty,\ \psi(x)=0$, тогда $\varphi(x)=\infty;\ f(x)=\infty^0$

2) $\ln f(x)=-\infty,\ \psi(x)=0;\quad \varphi(x)=0;\ f(x)=0^0$

3) $\ln f(x)=0,\ \psi(x)=\infty\quad \varphi(x)=1;\ f(x)=1^\infty$

Итакъ мы видимъ, что выраженіе (134) будетъ неопредѣленнымъ, когда оно имѣетъ одинъ изъ

трехъ видовъ: $\infty^0, 0^0, 1^\infty$ и что раскрытіе этой неопредѣленности сводится къ раскрытію неопредѣленности въ показателѣ выраженія (135)

Примѣръ I $\left[\left(\frac{1}{x}\right)^{tg x}\right] = \infty^0 = \left[e^{tg x \ln\frac{1}{x}}\right] =$

$= e^{\left[tg x(\ln 1 - \ln x)\right]_{x=0}} = e^{\left[\frac{-\ln x}{ctg x}\right]_{x=0}} = e^{\frac{\infty}{\infty}} = e^{\left[\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}\right]_{x=0}} =$

$= e^{\left[\frac{\sin^2 x}{x}\right]_{x=0}} = e^{\left[2\sin x\cos x\right]_{x=0}} = e^0 = 1$

Примѣръ II $\left[x^x\right]_{x=0} = 0^0 = \left[e^{x\ln x}\right]_{x=0} = e^{\left[\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right]_{x=0}} =$

$= e^{\frac{\infty}{\infty}} = e^{\left[\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right]_{x=0}} = e^{\left[-x\right]_{x=0}} = e^0 = 1.$

Примѣръ III $\left[(1+x)^{1/x}\right]_{x=0} = 1^\infty = \left[e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\right]_{x=0} =$

$= e^{\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]_{x=0}} = e^{\frac{0}{0}} = e^{\left[\frac{\frac{1}{1+x}}{1}\right]_{x=0}} = e^{\left[\frac{1}{1+x}\right]_{x=0}} = e^1 = e$

Наибольшія и наименьшія значенія функціи (Maximum и Minimum)

Пусть дана функція

$$y = f(x)$$

Разсмотримъ ее въ точкѣ $x = a$, полагая что вблизи этой точки ее можно разложить въ рядъ Тайлора

Намъ извѣстно (стр. 272) что

если $f'(a) > 0$, то функція возрастаетъ

" $f'(a) < 0$ " " убываетъ

въ точкѣ $x = a$

Положимъ теперь, что

$$f'(a) = 0,\ f''(a) \gtrless 0 \quad \ldots\ldots \quad (136)$$

Разлагаемъ функцію въ рядъ Тайлора:

$$f(a+h) = f(a) + h f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a + \vartheta h)$$

Замѣчая, что вслѣдствіе (136) $hf'(a) = 0$ и перенеся $f(a)$ въ лѣвую часть, получаемъ

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h^2}{2}f''(a+\theta h) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (137)$$

Мы предположимъ, что вторая производная въ точкѣ $x=a$ не равна нулю. Очевидно, если вторая производная непрерывна вблизи $x=a$, то при достаточно маломъ h, $f''(a+\theta h)$ будетъ произвольно мало отличаться отъ $f''(a)$ и вслѣдствіе этого будетъ имѣть тотъ же знакъ.

Положимъ, что $f''(a)>0$

Тогда правая часть ур-ія (137) будетъ положительна при достаточно маломъ значеніи h, ибо если h отрицательно, то h^2 все же будетъ положительно. Обозначая черезъ ε произвольно малую положительную величину, имѣемъ, подставляя ε вмѣсто h въ ур-іе (137):

$$f(a+\varepsilon)-f(a)>0, \quad f(a-\varepsilon)-f(a)>0$$

Изъ этихъ двухъ неравенствъ получаемъ:

$$\left.\begin{array}{l} f(a)<f(a+\varepsilon) \\ f(a)<f(a-\varepsilon) \end{array}\right\} \quad . \; . \quad (138)$$

y, C', B', A', f(a), O, C, A, B, x — фиг. 100.

Если функція $f(x)$ удовлетворяетъ неравенствамъ (138), т. е. въ нѣкоторой точкѣ $x=a$ имѣетъ значеніе меньше предыдущаго и меньше послѣдующаго, то говорятъ, что она въ точкѣ $x=a$ имѣетъ наименьшее значеніе или *minimum*. Видъ соотвѣтственной кривой вблизи такой точки указанъ на чертежѣ (фиг. 100), гдѣ $AA'=f(a)$; $BB'=f(a+\varepsilon)$, $CC'=f(a-\varepsilon)$ и $AA'<BB'$; $AA'<CC'$

Положимъ теперь, что $f'(a)=0$, $f''(a)<0$. Тогда правая часть ур-ія (137) отрицательна при достаточно-маломъ h и мы имеемъ:

$f(a+\varepsilon)-f(a)<0$ | $f(a)>f(a+\varepsilon)$
$f(a-\varepsilon)-f(a)<0$ | $f(a)>f(a-\varepsilon)$

т. е. $f(a)$ будетъ больше предшествующаго и больше послѣдующаго значенія. Тогда говорятъ, что $f(x)$ имѣетъ въ точкѣ $x=a$ наибольшее значеніе или maximum (фиг. 100).

Фиг. 101

Разсмотримъ теперь общій случай, когда производныя до $n-1$-го порядка включительно равны нулю, а производная n-го порядка не равна нулю

$$f'(a)=f''(a)=\ldots=f^{(n-1)}(a)=0,\quad f^{(n)}(a)\gtrless 0$$

Разложимъ опять функцію по (139) формулѣ Тайлора

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h).$$

Вслѣдствіе условія (139) всѣ производныя, за исключеніемъ n-ой, уничтожаются:

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h) \quad (140)$$

Опредѣлимъ знакъ правой части ур-ія. Если n-ая производная непрерывна вблизи точки $x=a$, то, при достаточно маломъ h, $f^{(n)}(a+\theta h)$ произвольно мало отличается отъ $f^{(n)}(a)$ и слѣдовательно имѣетъ тотъ же знакъ. Вслѣдствіе

этого, при достаточно маломъ h, второй множитель правой части будетъ положительнымъ, если $f^{(n)}(a)>0$ и отрицателенъ, если $f^{(n)}(a)<0$. Для опредѣленія же знака перваго множителя надо различать два случая: n число нечетное и n число четное. Въ первомъ случаѣ знакъ $\frac{h^n}{n!}$ зависитъ отъ знака h, а во второмъ этотъ множитель всегда положителенъ. Такимъ образомъ мы получаемъ слѣдующіе 4 случая:

I Пусть $f^{(n)}(a)>0$ и n нечетное число. Тогда знакъ всей правой части ур-ія (40) зависитъ отъ знака h. При положительномъ h правая часть больше, при отрицательномъ меньше нуля. Такъ что, если ε обозначаетъ число произвольно малое и положительное, то

$$f(a+\varepsilon)-f(a)>0$$
$$f(a-\varepsilon)-f(a)<0$$

Изъ обоихъ неравенствъ имѣемъ:

$$f(a+\varepsilon)>f(a)>f(a-\varepsilon),$$

т. е. $f(a)$ меньше послѣдующаго и больше предшествующаго значенія $f(x)$ значитъ функція въ точкѣ a <u>возрастаетъ</u>. II Пусть n опять нечетное число, но $f^{(n)}a<0$. Теперь, если h положительно, то правая часть отрицательна и наоборотъ отсюда

$$f(a+\varepsilon)-f(a)<0$$
$$f(a-\varepsilon)-f(a)>0$$ Слѣдовательно

$f(a+\varepsilon)<f(a)<f(a-\varepsilon)$, т. е. $f(a)$ меньше предшествующаго и больше послѣд. значенія $f(x)$.

Значитъ функція въ точкѣ а убываетъ

III Положимъ теперь n четное число и $f^{(n)}(a)>0$. Въ этомъ случаѣ правая часть положительна независимо отъ знака h; откуда имѣемъ:

$$f(a+\varepsilon)-f(a)>0 \quad \Big| \quad f(a)<f(a+\varepsilon)$$
$$f(a-\varepsilon)-f(a)>0 \quad \Big| \quad f(a)<f(a-\varepsilon);$$

f(a) меньше предыдущаго и меньше послѣдующаго значенія f(x), т. е. f(x) имѣетъ minimum въ точкѣ a

IV Остается случай, когда n четное число и $f^{(n)}(a)<0$. Здѣсь, независимо отъ знака h, правая часть отрицательна

$$f(a+\varepsilon)-f(a)<0 \quad \Big| \quad f(a)>f(a+\varepsilon)$$
$$f(a-\varepsilon)-f(a)<0 \quad \Big| \quad f(a)>f(a-\varepsilon);$$

f(a) больше предыдущаго и больше послѣдующаго значенія f(x), т. е. f(x) въ точкѣ a имѣетъ maximum

Итакъ, если дана функція $y=f(x)$ и если для точки x-a первая неуничтожающаяся производная нечетнаго порядка, то въ этой точкѣ функція или возрастаетъ или убываетъ; она возрастаетъ если упомянутая производная больше нуля и убываетъ, если эта производная меньше нуля. Если же первая неуничтожающаяся производная четнаго порядка; то функ. имѣетъ или Max. или Min; она имѣетъ Max., когда названная производная меньше нуля и Min., если она больше нуля

Примѣръ I. Пусть требуется опредѣлить Maximum и Minimum функціи

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x + 9$$

Опредѣлимъ первую производную данной функціи: $f'(x) = x^2 - 4$

Чтобы получить тѣ значенія x, въ которыхъ функція имѣетъ Max. или Min. слѣдуетъ приравнять первую производную нулю:

$$x^2 - 4 = 0 \; ; \; x = \pm 2$$

Наконецъ, чтобы опредѣлить, получится ли въ каждомъ случаѣ Max. или Min. опредѣлимъ вторую производную и знаки ея въ точкахъ +2 и −2

$$f''(x) = 2x$$

$$f''(+2) = 4 > 0 \; ; \; f''(-2) = -4 < 0$$

т. е. въ точкѣ +2 функція имѣетъ Min, а въ точкѣ (−2) Max.

Примѣръ II. Даны прямая l и внѣ ея двѣ точки A и B. Требуется найти на данной прямой такую точку P, чтобы сумма разстояній ея отъ данныхъ точекъ была наименьшая, т. е. чтобы AP+BP равнялось minimum'у. Опустимъ изъ A и B перпендикуляры AC = a, BD = b на l. Разстояніе CD назовемъ черезъ p. Положеніе точки P будетъ опредѣлено, если найдемъ разстояніе CP = x.

фиг. 102

Изъ прям. треуг. ACP и BDP

имѣемъ:

$$AP = \sqrt{x^2+a^2}, \quad BP = \sqrt{(p-x)^2+b^2}$$

Отсюда сумма разстояній AP и PB будетъ

$$f(x) = \sqrt{x^2+a^2} + \sqrt{(p-x)^2+b^2}$$

Изъ опредѣленія Min.ма этой функціи приравниваемъ первую производную къ нулю

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{p-x}{\sqrt{(p-x)^2+b^2}} = 0$$

т. е. для того, чтобы у получилась сумма была наименьшая, необходимо условіе:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{p-x}{\sqrt{(p-x)^2+b^2}} \qquad (141)$$

Рѣшая это ур-іе относительно x, найдемъ разстояніе CP. Но еще удобнѣе найти геометрическое значеніе найденнаго условія. Изъ чертежа видимъ, что

$$\cos\varphi = \frac{CP}{AP} = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}; \quad \cos\psi = \frac{PD}{BP} = \frac{p-x}{\sqrt{(p-x)^2+b^2}}$$

Сопоставляя эти выраженія съ ур-іемъ (141), находимъ:

$$\cos\varphi = \cos\psi, \text{ откуда } \varphi = \psi,$$

т. е. Min. разстоянія AP и BP получается, если углы φ и ψ равны между собой.

Слѣдовало бы еще доказать, что найденное условіе (141) не только необходимо, но и достаточно для полученія Minimum'а разстоянія AP и BP. Но Minimum вытекаетъ изъ условій задачи, потому что какъ изъ этихъ условій вытекаетъ, что существуетъ нѣкоторый minimum

А такъ какъ мы получили только одно условіе, то оно и будетъ условіемъ не только необходимымъ, но и достаточнымъ для полученія Minimum'a.

Если примемъ A за источникъ свѣта, а l за отражающую плоскость, то уголъ паденія луча равенъ углу отраженія. Изъ нашего примѣра мы видимъ, что лучи отражаются такимъ образомъ, чтобы пространство, проходимое ими было наименьшее. Такъ какъ въ однородной средѣ лучи распространяются съ постоянною скоростью, то указанный законъ можно выразить такимъ образомъ: Свѣтъ, доходящій, по отраженіи отъ плоскости l, изъ A въ B, отражается такъ, что время потраченное имъ на прохожденіе этого пути есть Minimum.

Примѣръ III. Пусть опять дана прямая l и двѣ точки A и B, лежащія по обѣ стороны прямой l, и пусть нѣкоторая точка движется выше прямой l съ постоянною скоростью α, а ниже l съ постоянною скоростью β. Требуется найти на прямой l такую точку P, чтобы время для прохожденія разстоянія $AP+PB$ было наименьшее. По формулѣ

Фиг. 103

$t = \frac{1}{v}$, время, необходимое для прохожденія AP будетъ $\frac{AP}{\alpha}$, а для прохожденія PB — $\frac{PB}{\beta}$. Слѣдовательно надо опредѣлить такую точку P, чтобы сумма

$$\frac{AP}{\alpha} + \frac{PB}{\beta}$$ сдѣлалась наименьшею.

Опустивъ изъ A и B перпендикуляры на l, изъ прямоугольныхъ треугольниковъ ACP и PDB имѣемъ:

$$AP = \sqrt{x^2+a^2};\ PB = \sqrt{(p-x)^2+b^2}$$

Откуда

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{\alpha} + \frac{\sqrt{(p-x)^2+b^2}}{\beta}$$

должно имѣть наименьшее значеніе. Приравниваемъ первую производную этой функціи нулю

$$f'(x) = \frac{x}{\alpha\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{p-x}{\beta\sqrt{(p-x)^2+b^2}} = 0$$

Т. е. для выполненія предыдущаго условія необходимо:

$$\frac{x}{\alpha\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{p-x}{\beta\sqrt{(p-x)^2+b^2}} \quad \ldots (112)$$

или (фиг. 103) $\frac{\cos\varphi}{\alpha} = \frac{\cos\psi}{\beta}$

Если возставить изъ P перпендикуляръ къ l, то очевидно $\cos\varphi = \sin i$; $\cos\psi = \sin r$ откуда

$$\frac{\sin i}{\alpha} = \frac{\sin r}{\beta}$$

или $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\alpha}{\beta} = Const.$ Если A есть мѣсто свѣта, а l плоскость, раздѣляющая двѣ разнородныя среды, то отношеніе Sin угла паденія къ Sin угла преломленія есть величина постоянная! Откуда мы заключа-

часть, что лучи преломляются тако, чтобы время, употребляемое на прохожденіе пути отъ A до B, лежащихъ въ разнородныхъ средахъ, было наименьшее. Относительно достаточности условія (142) слѣдуетъ сдѣлать то же замѣчаніе, что и въ предыдущей задачѣ.

Maximum и Minimum функціи двухъ перемѣнныхъ

Пусть дана функція

$$z = f(x,y) \quad \ldots\ldots \quad (143)$$

Требуется опредѣлить, въ какомъ случаѣ она имѣетъ Max. или Min. въ точкѣ $x=a$, $y=b$. Опредѣлимъ сначала, что вообще называется Max или Min. функціи двухъ перемѣнныхъ. Пусть поверхность A служитъ изображеніемъ данной функціи. Взявъ точку (a,b) на плоскости (xy) и возставивъ изъ нея перпендикуляръ до пересѣченія съ поверхностью, находимъ, что длина этого перпендикуляра равна $f(a,b)$

Фиг. 104.

Данная функція имѣетъ Max. въ точкѣ (a,b), если значеніе $f(a,b)$ будетъ больше значенія всѣхъ перпенд., возставленныхъ изъ сосѣднихъ точекъ до пересѣченія съ поверхностью.

Если же длина этого перпендикуляра будетъ меньше всѣхъ соседнихъ перпендикуляровъ, то функція въ данной точкѣ имѣетъ Min.

Чтобы опредѣлить условія Max и Min, введемъ новыя обозначенія:

$$\left.\begin{array}{l} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (144)$$

Если подставимъ ихъ въ уравненіе (143) то функція отъ x и y перейдетъ въ функцію отъ t:

$$f(t) = f(a + \alpha t, b + \beta t) \quad \ldots\ldots \quad (145)$$

Если t предѣлъ стремится къ нулю, то значеніе этой функціи превращается въ значеніе $f(a, b)$, а придавая, при произвольно маломъ t, всевозможныя значенія для α и β, получимъ всевозможныя точки, произвольно близкія къ точкѣ (a, b). Изъ опредѣленія Max. и Min. слѣдуетъ, что въ случаѣ Max мы должны имѣть

$$f(a + \alpha t, b + \beta t) - f(a, b) < 0$$

Причемъ эта разность должна быть меньше нуля для всевозможныхъ значеній α и β при произвольно маломъ t.

Наоборотъ эта разность будетъ больше нуля, когда функція имѣетъ Min въ точкѣ (a, b). Намъ извѣстно что для существованія Max. первая производная функція должна равняться нулю.

Найдемъ первую производную функціи (145) по формулѣ (80) (стр. 257)

$$f'(t)=\frac{\partial f(a+\alpha t,\, b+\beta t)}{\partial (a+\alpha t)}\cdot\frac{d(a+\alpha t)}{dt}+$$

$$+\frac{\partial f(a+\alpha t,\, b+\beta t)}{\partial (b+\beta t)}\cdot\frac{d(b+\beta t)}{dt},$$

$$f'(t)=\frac{\partial f(a+\alpha t,\, b+\beta t)}{\partial (a+\alpha t)}\alpha+\frac{\partial f(a+\alpha t,\, b+\beta t)}{\partial (b+\beta t)}\beta \quad \ldots (146)$$

Эта производная должна равняться нулю въ точкѣ $t=0$

$$f'(0)=\frac{\partial f(a,b)}{\partial a}\alpha+\frac{\partial f(a,b)}{\partial b}\beta=0$$

Но такъ какъ α и β могутъ имѣть всевозможные значенія, то эта сумма можетъ равняться нулю при всѣхъ значеніяхъ α и β только, если одновременно:

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial a}=0;\ \frac{\partial f(a,b)}{\partial b}=0 \quad \ldots (147)$$

Такимъ образомъ мы опредѣлили необходимое условіе для существованія Max или Min.

Далѣе, мы знаемъ, что функція имѣетъ Max или Min въ точкѣ (a,b), если первая не уничтожающаяся производная будетъ четнаго порядка. Мы разсмотримъ только тотъ случай, когда уже вторая производная не уничтожается. Чтобы получить вторую производную, дифференцируемъ выраженіе (146)

$$f''(t)=\left[\frac{\partial^2 f(a+\alpha t,\, b+\beta t)}{\partial (a+\alpha t)^2}\cdot\frac{d(a+\alpha t)}{dt}+\frac{\partial^2 f(a+\alpha t,\, b+\beta t)}{\partial (b+\beta t)\,\partial (a+\alpha t)}\cdot\frac{d(b+\beta t)}{dt}\right]\alpha+\left[\frac{\partial^2 f(a+\alpha t,\, b+\beta t)}{\partial (a+\alpha t)\,\partial (b+\beta t)}\cdot\frac{d(a+\alpha t)}{dt}+\frac{\partial^2 f(a+\alpha t,\, b+\beta t)}{\partial (b+\beta t)^2}\cdot\frac{d(b+\beta t)}{dt}\right]\beta.$$

Пользуясь формулой (85) стр. (241), вмѣсто

Этого можемъ написать:

$$f''(t)=\frac{\partial^2 f(a+\alpha t,b+\beta t)}{\partial(a+\alpha t)^2}\alpha^2+2\frac{\partial^2 f(a+\alpha t,b+\beta t)}{\partial(a+\alpha t)\partial(b+\beta t)}\alpha\beta+\frac{\partial^2 f(a+\alpha t,b+\beta t)}{\partial(b+\beta t)^2}\beta^2$$

Вставляя сюда значеніе $t=0$, получаемъ:

$$f''(0)=\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial a^2}\alpha^2+2\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial a.\partial b}\alpha\beta+\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial b^2}\beta^2$$

Въ случаѣ Max. эта вторая производная должна быть меньше нуля, а въ случаѣ Min больше нуля. Обозначая вторыя частныя производныя соотвѣтственно черезъ A, B, C, получаемъ:

$$f''(0)=A\alpha^2+2B\alpha\beta+C\beta^2$$

Спрашивается, когда это выраженіе имѣетъ постоянный знакъ, для всѣхъ возможныхъ значеній α и β? Это выраженіе можно представить въ такомъ видѣ:

$$f''(0)=\frac{1}{A}(A^2\alpha^2+2AB\alpha\beta+AC\beta^2)=$$
$$=\frac{1}{A}(A^2\alpha^2+2AB\alpha\beta+B^2\beta^2+AC\beta^2-B^2\beta^2)=$$
$$=\frac{1}{A}\{(A\alpha+B\beta)^2+(AC-B^2)\beta^2\}\ldots(148)$$

Первое слагаемое выраженія въ скобкахъ всегда положительно, второе имѣетъ множителемъ β^2, который также всегда положителенъ. Если бы $AC-B^2$ было меньше нуля, то для каждаго значенія α, при достаточно малыхъ значеніяхъ β, выраженіе въ скобкахъ было бы положительно при достаточно большихъ отрицательно. Если $AC-B^2$

равенства нулю, то можно опредѣлить безчисленное число паръ значеній α и β, именно $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{B}{A}$, для которыхъ $f''(0)$ обращается въ нуль. Итакъ, для того, чтобы $f''(0)$ имѣло постоянный знакъ при всѣхъ значеніяхъ α и β, мы должны имѣть

$$AC - B^2 > 0$$

Подставивъ вмѣсто A B и C ихъ значенія, получимъ второе необходимое условіе существованія Max. или Min

$$\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial a^2} \cdot \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial b^2} - \left[\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial a \cdot \partial b}\right]^2 > 0$$

Въ случаѣ Max. $f''(0)$ должно быть (149) отрицательно, въ случаѣ Min положительно. Но изъ формулы (148) видимъ, что это зависитъ отъ знака A, такъ какъ выраженіе въ скобкахъ положительно. Такимъ образомъ

если $\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial a^2} < 0$, то получимъ Max

и $\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial a^2} > 0$ " " Min

<u>Примѣръ</u>. Опредѣлить Max и Min функціи $z = x^2 + y^2$. Частныя производныя суть $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = 0 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2.$$

Необходимое условіе для существованія

Maximum Min, чтобы первыя частныя производныя равнялись нулю

$$2x=0 \quad \text{откуда} \quad x=0$$
$$2y=0 \qquad\qquad y=0$$

т. е. если вообще наступаетъ Max. и Min, то только для точекъ $x=0, y=0$. Крайняго необходимо условие (149) въ самомъ дѣлѣ, если вмѣсто производныхъ подставить ихъ частныя значенія, то получимъ:

$$2 \cdot 2 - 0 = 4 > 0$$

Остается рѣшить вопросъ наступитъ ли Max или Min. Но вторая производная

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 > 0$$

слѣдовательно мы получаемъ Minimum

<u>Дифференціальная геометрія</u> или приложеніе дифференціальнаго исчисленія къ геометріи

<u>Длина подкасательной и поднормали, касательной и нормали</u> Пусть дана кривая $y=f(x)$. Возьмемъ на кривой нѣкоторую точку P, касательная которой пусть составляетъ съ осью $X^{ов}$ уголъ τ. Тогда (ср. 211)

$$tg\,\tau = \frac{dy}{dx}$$

Перпендикуляръ возставленный въ точкѣ P къ касательной наз. нормалью кривой въ точкѣ P. Части касательной и нормали, заключающіяся между P и осью

Фиг. 105.

$x^{ов}$, т. е. отрѣзки $PT=t$ и $PN=n$ называются длиною касательной и нормали. Проекціи t_1 и n_1 этихъ отрѣзковъ на ось $x^{ов}$ наз. <u>подкасательною</u> и <u>поднормалью</u>.

Опредѣлимъ длину подкасательной и поднормали. Изъ Δ PQT имѣемъ:

$$tg\,\tau = \frac{QP}{TQ}$$

Подставляя $tg\,\tau = \frac{dy}{dx}$, $QP=y$, $TQ=t_1$, получаемъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{t_1}$$

Рѣшаемъ ур-іе относительно t_1, причемъ обозначаемъ $\frac{dy}{dx}$ черезъ y'.

$$t_1 = \frac{y}{y'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (150)$$

Изъ Δ PQN, замѣчая, что $\angle QPN = \angle \tau$, имѣемъ:

$$tg\,\tau = \frac{QN}{PQ}$$

Подставивъ соотвѣтственныя значенія находимъ

$$y' = \frac{n_1}{y}$$

Отсюда

$$n_1 = yy' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (151)$$

Теперь легко найти длину касательной и нормали. По пиѳагоровой теоремѣ $t^2 = y^2 + t_1^2 = y^2 + \frac{y^2}{y'^2} = \frac{y^2 + y^2 \cdot y'^2}{y'^2} = \frac{y^2}{y'^2}(1+y'^2)$

$$t = \frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (152)$$

Чтобы опредѣлить длину нормали находимъ изъ Δ PQN:

$$n^2 = y^2 + n_1^2 = y^2 + y^2 \cdot y'^2 = y^2(1+y'^2)$$

$$n = y\sqrt{1+y'^2} \quad \ldots\ldots \quad (153)$$

<u>Выпуклость кривой. Точка перегиба</u>

Вторая производная функціи имѣетъ

же геометрическое значение; именно, она определяетъ куда обращена выпуклость кривой. При разсматриваніи выпуклости кривой надо различать два случая: кривая лежитъ въ тупомъ углѣ, составленномъ касательной къ кривой въ точкѣ P и прямою l, или же въ остромъ. Въ первомъ случаѣ (фиг. 106) мы говоримъ, что кривая въ точкѣ P выпукла относительно прямой l, а во второмъ случаѣ (фиг. 107) - вогнута.

фиг. 106

фиг. 107

Если возставимъ перпендикуляръ n къ прямой l и на немъ одно изъ двухъ направленій примемъ за положительное, то оба эти случая можно также различать, говоря, что выпуклость обращена въ отрицательную или положительную сторону прямой n.

Чтобы опредѣлить куда обращена выпуклость кривой $y = f(x)$ въ точкѣ P, мы возьмемъ на кривой еще другую точку P_1, соотвѣтствующую положительному приращенію x и проведемъ касательныя къ кривой въ этихъ двухъ точкахъ. Въ первомъ случаѣ (ф. 108) когда выпуклость обращена въ отрицательную сторону оси y въ $\tau_1 < \tau$, во второмъ фиг. 109 $\tau_1 > \tau$, т. е.

фиг. 108

въ первомъ случаѣ τ возрастаетъ, во второмъ убываетъ. Но возрастаніе τ сопровождается возрастаніе $tg\,\tau$, убываніе τ - убываніе $tg\,\tau$.

фиг. 109

По стр. 272 первая производная отъ $tg\,\tau$, въ случаѣ возрастанія положительна, въ случаѣ убыванія отрицательна. Но такъ какъ $tg\,\tau = \frac{dy}{dx}$, то $\frac{d\,tg\,\tau}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$, значитъ, если выпуклость кривой обращена въ отрицательную сторону y въ, то $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, въ противномъ случаѣ $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$. Если же $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, то по стр. 301, первая неуничтожающаяся производная отъ $tg\,x$ должна быть въ первомъ случаѣ нечетнаго порядка и больше нуля, во второмъ нечетнаго порядка и меньше нуля. Замѣчая опять, что $tg\,\tau = \frac{dy}{dx}$, мы имѣемъ, что если $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, то въ первомъ случаѣ (выпуклость обращена внизъ) первая послѣ второй неуничтожающаяся производная функціи $y = f(x)$ четнаго порядка и больше нуля, во второмъ случаѣ (выпуклость обращена вверхъ) - она четнаго порядка и меньше нуля. Можетъ случиться, что выпуклость одной части кривой обращена въ положительную сторону оси y-въ, а выпуклость другой части той же кривой въ отрицат. сторону оси y-въ. Точка P, (ф. 110)

фиг. 110.

въ которой измѣнится смыслъ вогнутости кривой наз. точкою перегиба. Очевидно, въ точкахъ P $tg\,T$ имѣетъ Maximum Min. Но если $tg\,T$ имѣетъ maximum Min, то первая непрерывная производная функція $tg\,T$, должна быть четнаго порядка, т. е. $\frac{d^2 y}{dx^2}$ должно равняться нулю и первая послѣ второй, непрерывная производная функціи $y = f(x)$ должна быть нечетнаго порядка. Точки перегиба принадлежатъ къ такъ называемымъ *касательнымъ* точкамъ кривой

Уравненія касательной, асимптоты и нормали

Опредѣлимъ ур-ie касательной къ кривой $y = f(x)$, въ точкѣ $P(x, y)$ этой кривой (ф. 105). Если обозначить перемѣнныя координаты точекъ касательной черезъ ξ и η, то ур-іе ея будетъ: $\eta = m\xi + n$ (154)

Такъ какъ наша касательная проходитъ черезъ точку $P(x, y)$, то координаты точки P должны удовлетворять ея ур-iю

$$y = mx + n \quad \ldots\ldots \quad (155)$$

Вычитая изъ ур-ія (155) ур-іе (154), получимъ

$$\eta - y = m(\xi - x) \quad \ldots\ldots \quad (156)$$

По стр. (47) $m = tg\,T$, но $tg\,T = \frac{dy}{dx}$

Подставивъ это значеніе въ ур-іе (156), получимъ искомое ур-іе касательной:

$$\eta - y = (\xi - x)\,\frac{dy}{dx} \quad \ldots\ldots \quad (157)$$

Положимъ теперь, что кривая дана въ формѣ $f(x,y)=0$

Чтобы въ этомъ случаѣ получить ур-іе касательной въ точкѣ $M(x,y)$ къ данной кривой, стоитъ только въ ур-іе (157) вмѣсто $\frac{dy}{dx}$ подставить выраженіе (73) (стр. 253):

$$\eta - y = -(\xi - x)\frac{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}$$

или

$$(\xi - x)\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \qquad (158)$$

Примѣръ. Опредѣлить касательную къ кругу $(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0$

Частныя производныя будутъ

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2(x-a); \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2(y-b)$$

Подставимъ эти значенія въ ур-іе (158) и сократимъ на 2

$$(\xi - x)(x-a) + (\eta - y)(y-b) = 0$$

Это ур-іе можно представить въ такомъ видѣ:

$\{(\xi-a)-(x-a)\}(x-a)+\{(\eta-b)-(y-b)\}(y-b)=0$ $(\xi-a)(x-a)+(\eta-b)(y-b)-(x-a)^2-(y-b)^2=0$ или $(\xi-a)(x-a)+(\eta-b)(y-b)=r^2$

Мы получаемъ въ самомъ дѣлѣ ур-іе извѣстное изъ аналитической геометріи (стр. 67)

Рѣшимъ уравненіе (157) относительно η

$$\eta = \frac{dy}{dx}\cdot\xi + \left(y - x\frac{dy}{dx}\right) \ldots\ldots (159)$$

Положимъ, что кривая $y=f(x)$ простирается до безконечности. Если точка (x,y) двигаясь по кривой, удаляется въ безконечность, то можетъ случиться, что принадлежащая ей касательная стремится къ нѣкоторому предѣльному положенію. Такое предѣльное положеніе касательной или, иначе говоря, касательную въ безконечно-удаленной точкѣ кривой называютъ __асимптотою__ кривой.

Уравненіе асимптоты кривой $y=f(x)$ мы получимъ, если въ ур-іе (159) вмѣсто $\frac{dy}{dx}$ и $y - x\frac{dy}{dx}$ подставимъ предѣлы этихъ выраженій, соотвѣтствующіе безконечно удаленной точкѣ; т. е. ур-емъ асимптоты будетъ

$$\eta = \lim\frac{dy}{dx}\,\xi + \lim\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)$$

Можетъ также случиться, что кривая имѣетъ безконечно-удаленную точку, а касательная этой точки не стремится къ опредѣленному предѣлу, т. е. кривая не имѣетъ асимптоты. Тогда $\frac{dy}{dx}$ и $y - x\frac{dy}{dx}$ не приближаются къ предѣлу. Примѣръ такой кривой представляетъ парабола.

Опредѣлимъ ур-іе асимптотъ гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ldots\ldots (160)$

Уравненіе касательной къ гиперболѣ въ точкѣ (x,y), по стр. 88 есть:

$$\frac{x\xi}{a^2} - \frac{y\eta}{b^2} = 1$$

Рѣшая ур-іе относительно η, получимъ

$$\eta = \frac{b^2 x}{a^2 y}\xi - \frac{b^2}{y}$$

Изъ этого уравненія мы получимъ ур-ія асимптотъ, если вмѣсто $\frac{b^2x}{a^2y}$ и $\frac{b^2}{y}$ подставимъ ихъ предѣльныя значенія для $x=\infty$ и $y=\infty$

$$\eta = \lim_{\substack{x=\infty \\ y=\infty}} \frac{b^2x}{a^2y}\xi - \lim_{\substack{x=\infty \\ y=\infty}} \frac{b^2}{y} \quad (161)$$

Для опредѣленія предѣловъ коэффиціентовъ находимъ изъ ур. (160)

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{a^2}{b^2}\left(1+\frac{b^2}{y^2}\right)$$

$$\frac{x}{y} = \pm\frac{a}{b}\sqrt{1+\frac{b^2}{y^2}}$$

Такъ какъ $\lim_{y=0}\frac{b^2}{y^2}=0$, то отсюда

$$\lim_{\substack{x=\infty \\ y=\infty}} \frac{x}{y} = \pm\frac{a}{b};$$

слѣдовательно

$$\lim_{\substack{x=\infty \\ y=\infty}} \frac{b^2x}{a^2y} = \pm\frac{b}{a}, \quad \lim_{\substack{x=\infty \\ y=\infty}} \frac{b^2}{y} = 0$$

Подставляя эти значенія въ уравненіе (161) находимъ

$$\eta = \pm\frac{b}{a}\cdot\xi$$

Итакъ уравненія асимптотъ гиперболы будутъ

$$\eta = b\xi$$

$$\eta = -b\xi$$

Въ аналитической геометріи мы знаемъ, что асимптоты гиперболы есть прямыя, которыя пересѣкаютъ гиперболу въ безконечно удаленныхъ точкахъ; теперь же мы видимъ, что онѣ не только пересѣкаютъ, но касаются гиперболы въ безконечно удаленныхъ точкахъ. Опредѣлимъ теперь ур-іе нормали кривой въ точкѣ $P(x,y)$. Обозначимъ уголъ, который составляетъ нормаль съ осью X-овъ черезъ ω. Такъ какъ нормаль проходитъ черезъ точку P, то такими же разсужденіями, какъ при опредѣленіи ур-ія касательной, находимъ, что уравненіемъ ея будетъ

$$\eta - y = (\xi - x)\,\mathrm{tg}\,\omega \quad \ldots\ldots\ldots (162)$$

Уголъ ω можетъ быть тупымъ или острымъ. Легко видѣть, что если уголъ τ острый, то ω тупой и наоборотъ если τ тупой, то ω острый. Въ этихъ двухъ случаяхъ мы имѣемъ

фиг. 111

$$\omega = \tau + \frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{tg}\,\omega = \mathrm{tg}\left(\tau + \frac{\pi}{2}\right) = -\mathrm{ctg}\,\tau = -\frac{1}{\mathrm{tg}\,\tau} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

фиг. 112

$$\omega = \tau - \frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{tg}\,\omega = \mathrm{tg}\left(\tau - \frac{\pi}{2}\right) = -\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right) = -\mathrm{ctg}\,\tau = -\frac{1}{\mathrm{tg}\,\tau} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

т. е. въ обоихъ случаяхъ $tg\,\omega$ имѣетъ одинаковое значенiе

$$tg\,\omega = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Если подставимъ это значенiе въ уравненiе (162), то получимъ искомое ур-iе нормали:

$$\eta - y = (\xi - x)\left(-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right)$$

или

$$\xi - x + (\eta - y)\frac{dy}{dx} = 0 \ldots\ldots (163)$$

Если кривая дана уравненiемъ $f(x,y) = 0$, то отношенiе $\frac{dy}{dx}$ слѣдуетъ замѣнить частными производными по формулѣ (73)

$$(\xi - x)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = (\eta - y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \ldots (164)$$

Кривизна кривыхъ линiй.

Эволюты и эвольвенты.

Пусть на кривой даны три точки. Мы знаемъ, что черезъ три точки опредѣляется окружность. Если точки P_1 и P_2 все приближаются къ точкѣ P и разстоянiя между ними дѣлаются безконечно-малыми, то окружность принимаетъ нѣкоторое предѣльное положенiе, которое наз. кругомъ кривизны въ точкѣ P. Если радiусъ окружности равенъ ρ, то

$$k = \frac{1}{\rho}$$

радіусомъ кривизны, а центръ круга кривизны наз. центромъ кривизны.

Опредѣлимъ координаты центра (α, β) и радіусъ ρ круга кривизны кривой $y = f(x)$ въ точкѣ $P(x, y)$

Если черезъ ξ и η обозначимъ координаты точекъ круга, то ур-ніе его (стр. 24) будетъ

$$(\xi - \alpha)^2 + (\eta - \beta)^2 = \rho^2 \quad . \quad . \quad (165)$$

Такъ какъ кругъ проходитъ черезъ точку P, то координаты (x, y) этой точки удовлетворяютъ ур-нію (165):

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (166)$$

Положимъ, что кругъ (166) проходитъ еще черезъ нѣкоторую точку P_1 данной кривой, имѣющую координаты $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ тогда эти координаты должны удовлетворять ур-нію (165):

$$(x + \Delta x - \alpha)^2 + (y + \Delta y - \beta)^2 = \rho^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (167)$$

Вычитая ур-ніе (166) изъ (167) получимъ:

$$(2x - 2\alpha + \Delta x)\Delta x + (2y - 2\beta + \Delta y)\Delta y = 0$$

Раздѣлимъ полученное уравненіе на Δx:

$$2x - 2\alpha + \Delta x + (2y - 2\beta + \Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

Если теперь точка P_1, приближаясь къ P, совпадаетъ съ нимъ, то Δx и Δy дѣлаются безконечно-малыми и $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ переходитъ въ $\frac{dy}{dx}$:

$$2x - 2\alpha + (2y - 2\beta)\frac{dy}{dx} = 0$$

или $\quad x - \alpha + (y - \beta) f'(x) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (168)$

Послѣднее уравненіе выражаетъ, что кругъ проходитъ не только черезъ точку P, но и

черезъ точку безконечно-близкую къ P.
Если въ этомъ ур-ніи вмѣсто x и y подставить $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, то мы получимъ условіе что кругъ проходитъ черезъ точку, безконечно-близкую къ $P_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$:

$$x+\Delta x-\alpha+(y+\Delta y-\beta)\cdot f'(x+\Delta x)=0 \quad \dots (169)$$

Совокупность ур-ній (166), (168) и (169) опредѣляетъ окружность, проходящую черезъ точки (x,y), $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ и безконечно близкія къ нимъ. Если Δx и Δy дѣлаются безконечно малыми, то точка $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ совпадаетъ съ точкой безконечно-близкою къ точкѣ (x, y), и мы получимъ окружность проходящую черезъ точку (x,y) и двѣ безконечно-мало удаленныя отъ нея точки т. е. получимъ кругъ кривизны.
Чтобы совершить упомянутый переходъ къ $\Delta x=0$; $\Delta y=0$ вычтемъ ур. (168) изъ ур. (169):

$$\Delta x+(y-\beta)\{f'(x+\Delta x)-f'(x)\}+\Delta y f'(x+\Delta x)=0$$

Раздѣлимъ на Δx:

$$1+(y-\beta)\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}+\frac{\Delta y}{\Delta x}f'(x+\Delta x)=0$$

Перейдемъ къ предѣлу $\Delta x=0$:

$$1+(y-\beta)f''(x)+[f'(x)]^2=0 \quad \dots (170)$$

Изъ ур-ній (166), (168) и (170) мы можемъ теперь опредѣлить α, β, ρ. Такъ, рѣшая ур-ніе (170) относительно β получимъ

$$(\beta-y)f''(x)=1+[f'(x)]^2;\quad \beta=y+\frac{1+[f'(x)]^2}{f''(x)}.$$

Подставляя значеніе β въ ур. (168) находимъ:

$$x-\alpha=\frac{\{1+[f'(x)]^2\}f'(x)}{f''(x)}$$

$$\alpha = x - \frac{\{1+[f'(x)]^2\}f'(x)}{f''(x)}$$

или, если $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ заменимъ черезъ y, y', y'': $\alpha = x - \frac{(1+y'^2)y'}{y''}$, $\beta = y + \frac{1+y'^2}{y''}$. (171)

Чтобы получить радіусъ ρ, стоитъ только подставить значенія α и β въ ур-ніе (166)

$$\rho^2 = \frac{(1+y'^2)^2 y'^2}{y''^2} + \frac{(1+y'^2)^2}{y''^2} = \frac{(1+y'^2)^2}{y''^2}\cdot(y'^2+1) = \frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}$$

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} \quad \ldots\ldots (172)$$

ρ имѣетъ двоякій знакъ, но принято считать радіусъ кривизны всегда положительнымъ.

Разсмотримъ подробнѣе ур-ніе (168). Сравнивая его съ ур-ніемъ нормали (163), проходящей черезъ точку $P(x, y)$ кривой $y = f(x)$

$$\xi - x + (\eta - y) f'(x) = 0 \quad \ldots\ldots (173)$$

замѣчаемъ, что оно получается изъ уравненія (173), если ξ и η замѣнить черезъ α и β, т. е. α и β удовлетворяютъ ур-нію (173). Отсюда мы заключаемъ, что точка съ координатами α и β лежитъ на нормали, проходящей черезъ точку $P(x, y)$. Такимъ же образомъ изъ ур-нія (169) найдемъ, что точка (α, β) лежитъ также на нормали точки $P_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$, т. е. она лежитъ на пересѣченіи обѣихъ нормалей. Если теперь

при Р возникает, что точка (α, β) становится центромъ кривизны. На этомъ основании мы можемъ вывести следующее новое определение центра кривизны: Центромъ кривизны наз. предельное положение точки пересечения двухъ нормалей, при безконечномъ сближении точекъ къ которымъ принадлежатъ эти нормали.

Такъ какъ всякая нормаль круга проходитъ черезъ центръ его, то кругъ есть кривая, которой центръ совпадаетъ со своимъ центромъ кривизны.

Всѣ нормали прямой линии параллельны между собой, т. е. пересекаются въ безконечности: следовательно $\rho = \infty$. Если подставить это значение въ формулу $K = \frac{1}{\rho}$, то получимъ $K = \frac{1}{\infty} = 0$ т. е. кривизна прямой линии равна нулю. Отсюда, если центръ кривизны удаляется отъ соответственной точки кривой, то кривизна ея уменьшается, и при безконечномъ удалении центра кривизны, кривая приближается къ прямой линии. Наоборотъ, при уменьшении радиуса кривизны, кривизна кривой увеличивается. Каждой точкѣ кривой принадлежитъ определенный центръ кривизны. Если точка движется

по кривой, то центръ кривизны ея также описываетъ нѣкоторую кривую, называемую эволютою развертываемою данной кривой. Данная кривая, по отношенію къ своей эволютѣ, наз. эвольвентою или разверткою

Если обозначимъ координаты точекъ эволюты черезъ ξ и η, то, по опредѣленію эволюты, мы получимъ ея ур-ніе, если замѣнимъ въ ур-ніяхъ (171) α и β черезъ ξ и η и изъ этихъ двухъ ур-ній и ур-нія кривой $y = f(x)$ исключимъ x и y.

Интегральное исчисленіе.

Понятіе объ интегралѣ, опредѣленный интегралъ, какъ нѣкоторая площадь и какъ предѣлъ нѣкоторой суммы

Пусть производная функціи $F(x)$ равна $f(x)$:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Если по данной функціи $F(x)$ требуется найти ея производную, то такое дѣйствіе мы наз. дифференцированіемъ функціи $F(x)$; если же дана производная $f(x)$ и требуется найти функцію $F(x)$, то это дѣйствіе наз. интегрированіемъ функціи $f(x)$, а функція $F(x)$ интеграломъ данной функціи $f(x)$.

Если напримѣръ, $f(x) = e^x$, то интеграломъ этой функціи будетъ $F(x) = e^x$ ибо $\frac{de^x}{dx} = e^x$. Если же $f(x) = \cos x$, то интеграломъ будетъ такая функція, производная которой равна $\cos x$; такая функція какъ извѣстно, есть $\sin x$, т. е. $F(x) = \sin x$.

Мы знаемъ, что если функціи придать нѣкоторое постоянное произвольное количество, то значеніе ея производной не измѣняется, слѣдовательно если $F(x)$ есть интегралъ функціи $f(x)$, то $F(x) + C$

будетъ также интеграломъ $f(x)$; дѣйствительно:

$$\frac{d[F(x)+c]}{dx}=\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$$

Такимъ образомъ мы видимъ что интегралъ опредѣленъ только до нѣкотораго произвольнаго постояннаго количества и вслѣдствіе этого такой интегралъ называется неопредѣленнымъ интеграломъ. Произвольное постоянное количество называется постояннымъ интегрированія.

Познакомимся съ двумя вспомогательными теоремами:

Теорема I. функція, непрерывная въ данномъ промежуткѣ и имѣющая въ этомъ промежуткѣ производную, равную нулю, есть величина постоянная.

Геометрически легко доказать эту теорему. Если $tg\alpha=0$ то и $\angle\alpha=0$; значитъ если во всѣхъ точкахъ даннаго промежутка $\varphi'(x)=0$, то для всѣхъ этихъ точекъ угла наклоненія касательной къ оси $x^{ов}$ равняется нулю, т. е. данная функція изображаетъ прямую линію, параллельную оси $y^{ов}$, а ур-ніе такой прямой есть $y=\varphi(x)=Const.$

Докажемъ теперь эту теорему аналитическимъ путемъ.

Данная функція $\varphi(x)$ непрерывна въ

промежутка отъ a до b тогда по теоремѣ Ролле (стр. 373)

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}=\varphi'(a+\vartheta(x-a))\ldots(1)$$

гдѣ $0\leq\vartheta\leq 1$;
для всякаго значенія x между a и b.
Такъ какъ ϑ положительная правильная дробь, то $a+\vartheta(x-a)$ заключается между a и x, т. е. лежитъ тоже въ данномъ промежуткѣ отъ a до b. По предположенію, для всякой точки внутри этого промежутка $\varphi'(x)=0$, слѣдовательно

$$\varphi'[a+\vartheta(x-a)]=0$$

Т. к. правая часть ур-нія (1) равна нулю, то и лѣвая часть должна равняться нулю, для чего необходимо и достаточно: $\varphi(x)-\varphi(a)=0$

или $\varphi(x)=\varphi(a)$

Значитъ $\varphi(x)$ для всѣхъ значеній x даннаго промежутка равняется $\varphi(a)$, т. е. $\varphi(x)$ есть величина постоянная.

Теорема II. Если двѣ функціи во всѣхъ точкахъ нѣкотораго промежутка имѣютъ одинаковыя производныя, то онѣ различаются въ этомъ промежуткѣ только постоянною величиною.

Пусть функціи $F(x)$ и $\Phi(x)$ имѣютъ

одинаковыя производныя:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x);$$

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = f(x);$$

и пусть $\varphi(x) = F(x) - \Phi(x)$ . . . . (2)

Тогда производная функціи $\varphi(x)$ будетъ

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{dF(x)}{dx} - \frac{d\Phi(x)}{dx} = f(x) - f(x) = 0$$

Но если производная функціи $\varphi(x)$ во всѣхъ точкахъ равна нулю, то, по предыдущей теоремѣ эта функція есть постоянная величина

$$\varphi(x) = c$$

Подставивъ ур-ніе (2), получимъ:

$$F(x) - \Phi(x) = c,$$

т. е. дѣйствительно обѣ функціи различаются только постоянной величиной.

По этой теоремѣ, если $\Phi(x)$ есть нѣкоторый интегралъ функціи $f(x)$, то самый общій видъ интеграла функціи $f(x)$ будетъ:

$$F(x) = \Phi(x) + c \quad . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Если намъ извѣстно значеніе $F(x)$ для какой-нибудь точки, то этимъ значеніе $F(x)$ интеграла опредѣлено для всякой точки. Въ самомъ дѣлѣ, если въ точкѣ $x = a$

$$F(a) = A,$$

то $\Phi(a) + C = A$.

отсюда $C = A - \Phi(a)$

Подставляя въ ур-ніе (3) находимъ для $F(x)$ совершенно опредѣлительное значеніе:

$$F(x) = \Phi(x) - \Phi(a) + A.$$

Пусть кривая BQ изображаетъ функцію $y = f(x)$. Взявъ на Ox точки A и P и возставивъ перпендикуляры имѣемъ:

$$AB = f(a);\ PQ = f(x)$$

Если P движется по Ox, то площадь фигуры APQBA измѣняется т. е. эта площадь зависитъ отъ x, или она есть функція отъ x.

$$APQBA = F(x)$$

Требуется опредѣлить эту функцію. Придадимъ OP приращеніе $\Delta x = PP'$, а изъ точки P' возставимъ перпендикуляръ на Ox. Тогда

пл. $AP'Q'BA = F(x + \Delta x)$

Если выраженіе (4) вычесть изъ (5) то получимъ приращеніе площа-

фиг. 114.

-ди:

$$PP'Q'Q = F(x+\Delta x) - F(x)$$

Проведимъ черезъ Q и Q' параллели къ оси $x^{\text{ы}}$ до пересѣченія перпендикулярами P'Q' и PQ въ точкахъ R' и R. Если функція возрастаетъ то

$$PP'R'Q < PP'Q'Q < PP'Q'R$$

или, такъ какъ площадь параллелограмма равна произведенію основанія на высоту:

$$PQ \cdot \Delta x < PP'Q'Q < P'Q' \cdot \Delta x;$$

$$f(x) \cdot \Delta x < F(x+\Delta x) - F(x) < f(x+\Delta x) \cdot \Delta x.$$

Раздѣливъ на Δx имѣемъ:

$$f(x) < \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} < f(x+\Delta x).$$

Предѣлъ правой части для $\Delta x = 0$ равенъ $f(x)$ т. е. въ предѣлѣ лѣвая и правая части равны между собою слѣдовательно и предѣлъ средняго члена равенъ $f(x)$:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x)$$

Но этотъ предѣлъ есть ни что иное, какъ производная функція $F(x)$

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

т. е. искомая площадь $F(x)$ выражается интеграломъ функціи $f(x)$

Но мы знаемъ, что F(x) опредѣлено лишь до нѣкотораго постояннаго количества:

$$F(x) = \bar{\Phi}(x) + c \ldots\ldots (6)$$

Слѣдовательно для однозначнаго опредѣлителя нашей площади надо найти величину c. Выше мы доказали что F(x) опредѣлено для всякой точки x, если извѣстно его значеніе хоть для одной какой-нибудь точки. Но мы знаемъ, что для точки x=a т. е. если P совпадаетъ съ A площадь F(a) = 0

$$F(a) = \bar{\Phi}(a) + c = 0$$

Отсюда: $C = -\bar{\Phi}(a)$.

Подставляя это значеніе въ ур-ніе (6) получимъ:

$$F(x) = \bar{\Phi}(x) - \bar{\Phi}(a) \ldots (7)$$

На основаніи ур-нія (7) легко опредѣлить площадь между двумя опредѣленными ординатами. Такъ если OA = a, OA' = b, то подставляя въ ур-ніе (7) b вмѣсто x, имѣемъ:

$$AA'B'B = F(b) = \bar{\Phi}(b) - \bar{\Phi}(a) \quad (8)$$

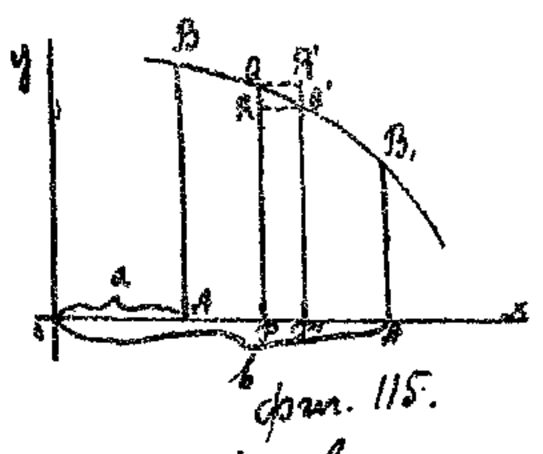
т. е. для опредѣленія искомой площади беремъ разность интеграловъ для крайнихъ значеніи x = a

$x = b$.
Разность такихъ неопредѣленныхъ интеграловъ функціи $f(x)$ является совершенно опредѣленною величиною и называется опредѣленнымъ интеграломъ функціи $f(x)$ между предѣлами a и b причемъ a называется низшимъ, b верхнимъ предѣломъ.
Мы доказали теорему (8) только для того случая, что функція возрастаетъ въ промежуткѣ отъ a до b. Положимъ теперь, что она убываетъ во всѣхъ точкахъ этого промежутка (фиг. 115). Тогда очевидно:

$$PP_1R'Q > P_1^{\prime}PQ'Q > PP_1Q'R$$

Разсуждая по предыдущему, придемъ опять къ тому-же результату:

$$AA'B'B = \Phi(b) - \Phi(a)$$



фиг. 115.

Наконецъ эту теорему можно доказать и для того случая, когда функція въ данномъ промежуткѣ имѣетъ Max или Min.
Такъ, если функція имѣетъ Maximum въ точкѣ C, ордината CD дѣлитъ нашу площадь

на двѣ части:

$AA'B'B = ACDB + CA'B'D'$

До C функція всюду возрастаетъ, а послѣ C убываетъ; слѣдовательно, мы можемъ для $ACDB$ и $CA'B'D$ отдѣльно примѣнить формулу (γ):

фиг. 116

$$ACDB = \Phi(c) - \Phi(a)$$
$$CA'B'D = \Phi(b) - \Phi(c)$$

По сложеніи получимъ:

$$AA'B'B = \Phi(b) - \Phi(a),$$

т. е. и въ этомъ случаѣ наша теорема сохраняетъ силу.

Примѣръ: $y = mx^2$

Какъ извѣстно, эта функція изображаетъ параболу, ось которой совпадаетъ съ осью y-овъ, а верш... на съ началомъ координатъ.

Чтобы опредѣлить площадь между двумя какими-нибудь ординатами, надо найти $F(x)$, функцію, производная которой равна mx^2; есть:

фиг. 117.

$$F(x) = \frac{mx^3}{3} + C$$

При $x = 0$, очевидно, площадь равна

нулю т. е.

$$\mathcal{F}(a) = \frac{ma^3}{3} + C = 0$$

Откуда $C = -\frac{ma^3}{3}$.

Подставляемъ значеніе C въ выраженіе для $\mathcal{F}(x)$

$$\mathcal{F}(x) = \frac{mx^3}{3} - \frac{ma^3}{3}$$

Если $x = b$, то

$$ACDBA = \frac{mb^3}{3} - \frac{ma^3}{3}$$

Если начальное значеніе x равняется 0, то мы получаемъ площадь

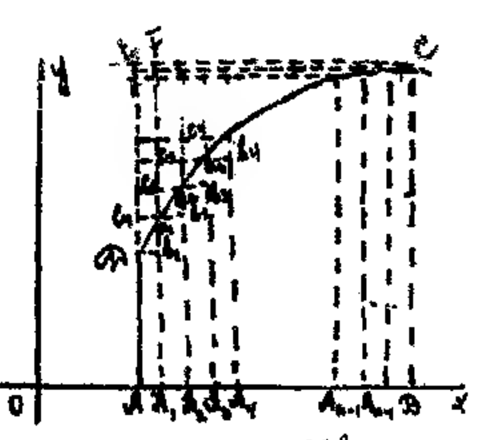
$$OCDO = \frac{mb^3}{3} = \frac{m\overline{OC}^3}{3},$$

или такъ какъ по ур-нію параболы $CD = m\,\overline{OC}^2$;

$$OCDO = \frac{OC \cdot CD}{3}$$

т. е. площадь $OCDO$ равняется ⅓ площади прямоугольника $OCDb$.

Рѣшимъ теперь ту же задачу съ другой точки зрѣнія (фиг. 118)



фиг. 118.

Раздѣлимъ разстояніе AB на n равныхъ частей и изъ полученныхъ точекъ $A_1, A_2, A_3 \dots$ возставимъ перпендикуляры до пересѣченія съ кривой въ точ-

ками $a_1, a_2, a_3 \ldots$, через которыя проведемъ параллели къ Ox. Тогда площадь $ABCD$ равна суммѣ полученныхъ прямоугольниковъ и площадей фигуръ Db_1a_1, $a_1b_2a_2$, $a_2b_3a_3$ ......

$$J = AA_1b_1D + A_1A_2b_2a_1 + \ldots A_{n-1}Bb_na_{n-1} + \mathfrak{D},$$

гдѣ $\mathfrak{D} = Db_1a_1 + a_1b_2a_2 + \ldots + b_{n-1}b_nC$.

Если обозначимъ $\Delta x = AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{n-1}B$, то J можно выразить такимъ образомъ:

$$J = f(a)\Delta x + f(a+\Delta x)\Delta x + f(a+2\Delta x)\Delta x + \ldots + f(b-\Delta x)\Delta x + \mathfrak{D}$$

или $$J = \sum_{a}^{b-\Delta x} f(x)\Delta x + \mathfrak{D},$$

гдѣ символъ $\sum_a^{b-\Delta x} f(x)\Delta x$ обозначаетъ сумму значеній вида $f(x)\Delta x$, которыя получаются если аргументъ функціи $f(x)$, прерывными измѣненіями равными Δx, отъ значенія переходитъ къ значенію $b-\Delta x$

Если увеличивать до безконечности число отрѣзковъ, то Δx дѣлается безконечно малымъ. Тогда получимъ:

$$J = \lim_{\Delta x=0} \sum_a^{b-\Delta x} f(x)\Delta x + \lim_{\Delta x=0} \mathfrak{D} \qquad (9)$$

Если теперь дополнимъ фигуры Db_1a_1, $a_1b_2a_2$, ... до прямоугольниковъ, то сумма этихъ прямоугольниковъ будетъ больше суммы названныхъ фигуръ, т.е. если (b_1c_1) обозначаетъ прямоугольникъ $Db_1a_1c_1$ и т.д.

$$\mathfrak{D} < (b_1c_1) + (b_2c_2) + (b_3c_3) + \ldots + (b_nc_n).$$

Проведя затѣмъ через точки $a_1, a_2 \ldots C$

параллели къ оси $x^{\text{в}}$ до пересѣченія съ продолженными прямыми AD и A_1a, находимъ что площадь Db_1FE равна суммѣ упомянутыхъ прямоугольниковъ. Слѣдовательно:

$$D < Db_1FE,$$

но $Db_1FE = DE.Db_1 = (BC - AD)\Delta A_1 = [f(b) - f(a)]\Delta x$,

откуда $D < [f(b) - f(a)]\Delta x$.

Переходя къ предѣлу имѣемъ

$$0 < \lim_{\Delta x = 0} D < \lim_{\Delta x = 0} [f(b) - f(a)]\Delta x.$$

Правая часть неравенства какъ произведеніе конечнаго количества на безконечно-малое стремится къ нулю; откуда

$$\lim_{\Delta x = 0} D = 0$$

Подставляя въ формулу (9) получимъ:

$$F = \lim_{\Delta x = 0} \sum_a^b f(x)\,\Delta x$$

При $\Delta x = 0$ прерывное измѣненіе аргумента x функціи $f(x)$ переходитъ въ непрерывное, такъ что F есть сумма безконечно-большого числа безконечно-малыхъ слагаемыхъ вида $f(x)dx$, которыя получаются, если x непрерывно переходитъ отъ значенія a къ значенію b. Такого рода сумма обозначается черезъ $\int$:

$$F = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Раньше мы нашли, что $F = \Phi(b) - \Phi(a)$, гдѣ $\Phi(x)$ есть интегралъ функціи $f(x)$. Откуда:

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f(x)\,dx. \quad (10)$$

Разность $\Phi(b) - \Phi(a)$ мы называемъ опре-

уменьшимыхъ интеграловъ функціи $f(x)$ между предѣлами a и b. Такимъ образомъ опредѣленный интегралъ есть предѣлъ, къ которой суммы безконечнаго числа безконечно-малыхъ элементовъ.

Слѣдуетъ замѣтить, что эта теорема доказана только для функцій, возрастающихъ въ данныхъ промежуткахъ, но легко распространить это доказательство на случай всякой непрерывной функціи.

Знакъ $\int$ употребляютъ также для обозначенія неопредѣленнаго интеграла, такъ что,

если $$\frac{d\Phi(x)}{dx} = f(x) \quad \ldots\ldots (11)$$

то $$\Phi(x) = \int f(x)\,dx,$$

гдѣ подъ знакомъ $\int$ пишутъ дифференціалъ, а не производную функціи $\Phi(x)$.

Изъ ур-нія (11) имѣемъ:

$$d\,\Phi(x) = f(x)\,dx$$

Отсюда $\int d\,\Phi(x) = \int f(x)dx = \Phi(x)$

т. е. знаки $\int$ и d взаимно уничтожаются.

На основаніи нашего новаго обозначенія ур-ніе (10) можемъ представить въ видѣ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\int f(x)dx\Big]_{x=b} - \Big[\int f(x)dx\Big]_{x=a} \quad (12)$$

На этомъ основаніи двѣ важныя теоремы:

2. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \ldots (13)$

Дѣйствительно

$$\int_b^a f(x)dx = \left[\int f(x)dx\right]_{x=a} - \left[\int f(x)dx\right]_{x=b}$$

Сравнивая, что выраженіе съ (12) убѣждаемся въ справедливости уравненія (13)

3. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \ldots (14)$

По формулѣ (12) имѣемъ

$$\int_a^c f(x)\,dx = \left[\int f(x)dx\right]_{x=c} - \left[\int f(x)dx\right]_{x=a}$$

$$\int_c^b f(x)dx = \left[\int f(x)dx\right]_{x=b} - \left[\int f(x)dx\right]_{x=c}$$

Складывая два послѣднія ур-ія и пользуясь ур-ем (12) получимъ ур-ie (14)

Основныя формулы интегрированія

Пусть требуется опредѣлить интегралъ функціи x^m. Изъ дифференціальнаго исчисленія мы знаемъ, что

$$d\,\frac{x^{m+1}}{m+1} = x^m dx$$

т. е. $\frac{x^{m+1}}{m+1}$ есть функція, дифференціалъ которой равенъ $x^m dx$ или эта функція равна $\int x^m dx$. Но такъ какъ интегралъ опредѣляется только до извѣстнаго постояннаго количества, то вообще

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$$

Это ур-ie вѣрно, если $m \gtrless -1$. Для случая $m = -1$ мы пользуемся формулою

$$d\,l\,n\,x = \frac{dx}{x}.$$

Отсюда

$$\int \frac{dx}{x} = l\,n\,x + c$$

Зная, что $d\left[\frac{a^x}{\ln a}\right]=a^x dx$, находимъ:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

если вмѣсто a подставить частное значеніе e, то получимъ:

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Чтобы найти интегралъ тригонометрической функціи $\sin x$, замѣчаемъ, что

$$d(-\cos x) = \sin x . dx$$

откуда $\int \sin x . dx = -\cos x + C$

Также находимъ

$$d(\sin x) = \cos x . dx; \quad \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$d\, tg x = \frac{dx}{\cos^2 x}; \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg x + C.$$

$$d(-ctg x) = \frac{dx}{\sin^2 x}; \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg x + C.$$

Далѣе мы имѣемъ формулу

$$d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Значитъ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

Но съ другой стороны мы знаемъ, что $d \arccos x$ равенъ тому же выраженію, но съ обратнымъ знакомъ, слѣдовательно имѣемъ также:

$$d(-\arccos x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} . dx; \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C$$

По теоремѣ второй на стр. 328 мы должны тогда имѣть, что функціи $\arcsin x$ и $-\arccos x$ различаются только на постоянную величину.

Въ самомъ дѣлѣ, мы нашли (стр. 238)

что $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$.
Также изъ формулъ
$d \operatorname{arctg} x = \frac{dx}{1+x^2}$, $d(-\operatorname{arcctg} x) = \frac{dx}{1+x^2}$ мы находимъ

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c = -\operatorname{arcctg} x + c$$

Таблица.

$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{Ctg} x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$
$\int e^x dx = e^x + C$	$= -\arccos x + c$
$\int \cos x\, dx = \sin x + C$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$
$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$	$= -\operatorname{arcctg} x + c$

Теорема I. Интегралъ суммы функцій равенъ суммѣ интеграловъ слагаемыхъ

$$\int\{f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_n(x)\}dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \dots + \int f_n(x)\,dx.$$

Чтобы убѣдиться въ справедливости этой теоремы, стоитъ только доказать, что производныя лѣвой и правой части равны между собою. Дифференцируя лѣвую часть мы получаемъ непосредственно $f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_n(x)$. дифференцированіи правой части мы пользуемся теоремою, что производная суммы функцій равна суммѣ производныхъ слагаемыхъ и тогда въ обоихъ случаяхъ получаемъ тоже выраженіе $f_1(x)+f_2(x)+\dots f_n(x)$.

Теорема II. Постоянный множитель

можно

не вынесения за знака интеграла:

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$$

Эту формулу также можно проверить путем дифференцирования. Производная левой части равна $Af(x)$, производная же правой части есть $\frac{d}{dx}A\int f(x)dx$; постоянный множитель A по известной теореме дифференциального исчисления может быть вынесен за знак дифференцирования и мы получим отсюда: $A\frac{d}{dx}\int f(x)dx = Af(x)$

Пример I. $\int(x^4+12x^3+3x^2+x+7)dx$

По теореме I имеем:

$$I=\int(x^4+12x^3+3x^2+x+7)dx=\int x^4dx+\int 12x^3dx+\int 3x^2dx+$$
$$+\int xdx+\int 7dx.$$

Затем на основании теоремы II:

$$I=\int x^4dx+12\int x^3dx+3\int x^2dx+\int xdx+7\int dx.$$

Пользуясь формулой (15) находим

$$I=\frac{x^5}{5}+12\frac{x^4}{4}+3\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+7x+C=\frac{x^5}{5}+3x^4+x^3+\frac{x^2}{2}+7x+C.$$

Пример II. $\int[(x-1)^2+(x+2)^3]dx$

Раскрывая скобки, получим:

$$I=\int[(x-1)^2+(x+2)^3]dx=\int(x^2-2x+1+x^3+6x^2+12x+$$
$$+8)dx=\int(x^3+7x^2+10x+9)dx$$

Далее поступаем, как в предыдущем примере

$$I=\int x^3dx+7\int x^2dx+10\int xdx+9\int dx=\frac{x^4}{4}+\frac{7}{3}x^3+5x^2+9x+C$$

Пример III. $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x^3}+\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\right)dx=$

$$=\int\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-3}+\frac{x^{\frac{1}{5}}}{x^{\frac{1}{3}}}-x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{x}\right)dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int x^{-3}dx+\int x^{-\frac{2}{15}}dx-$$
$$-\int x^{-\frac{1}{2}}dx-\int\frac{dx}{x}=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^{-2}}{-2}+\frac{x^{\frac{13}{15}}}{\frac{13}{15}}-\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-\ln x+C=$$
$$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{15}{13}\sqrt[15]{x^{13}}-2\sqrt{x}-\ln x+C.$$

Формула интегрированія по частямъ

Намъ извѣстна формула (стр 220):

$$d(uv) = u\frac{dv}{dx}\cdot dx + v\frac{du}{dx}dx.$$

Интегрируя это ур-ніе получимъ:

$$\int d(uv) = \int u\frac{dv}{dx}\cdot dx + \int v\frac{du}{dx}\cdot dx,$$

$$uv = \int u\frac{dv}{dx}dx + \int\frac{du}{dx}v\cdot dx.$$

Отсюда $\int u\frac{dv}{dx}\cdot dx = uv - \int\frac{du}{dx}v\cdot dx$ (16)

Введемъ обозначенія $u = \varphi(x)$, $\frac{dv}{dx} = \psi(x)$,

тогда $\frac{du}{dx} = \varphi'(x)$; $v = \int\psi(x)\cdot dx$.

Подставляя эти значенія въ формулу (16) получаемъ:

$$\int\varphi(x)\cdot\psi(x)dx = \varphi(x)\int\psi(x)dx - \int\varphi'(x)\left\{\int\psi(x)dx\right\}dx.$$

Эта формула носитъ названіе формулы интегрированія по частямъ.

Примѣръ I $\int xe^x dx$

Обозначимъ черезъ $\psi(x)$ тотъ множитель, интегралъ котораго намъ извѣстенъ, а за $\varphi(x)$ примемъ такой, котораго производная имѣетъ наиболѣе простую форму. Именно:

$$x = \varphi(x);\quad e^x = \psi(x),\ \text{ибо}\ \frac{dx}{dx} = 1,\ \int e^x dx = e^x.$$

Тогда по формулѣ (16)

$$\int xe^x dx = x\int e^x dx - \int\left\{\int e^x dx\right\}dx =$$

$$= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c = e^x(x-1) + C$$

Примѣръ II $\int \ln x\, dx$.

$\ln x$ можно разложить на два множителя $\ln x$ и 1. Обозначимъ

$$\ln(x) = \varphi(x);\quad 1 = \psi(x)$$

Тогда $\int \ln x\, dx = \ln x\int dx - \int\frac{1}{x}\left\{\int dx\right\}dx = x\ln x - \int dx =$

$= x \ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$

Методъ подстановки новой перемѣнной

Пусть $f(x)$ есть производная функціи $F(x)$:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Тогда $\quad F(x) = \int f(x)\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$

Спрашивается, что произойдетъ, если вмѣсто x подъ знакомъ интеграла ввести другую перемѣнную t, причемъ $x = \varphi(t)$. По формулѣ дифференцированія функціи отъ функціи (стр. 228) имѣемъ:

$$\frac{dF(x)}{dt} = \frac{dF(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt},$$

или, такъ какъ $x = \varphi(t)$:

$$\frac{dF(\varphi(t))}{dt} = \frac{dF(x)}{dx} \cdot \varphi'(t)$$

откуда: $\quad \dfrac{dF(x)}{dx} = \dfrac{\frac{dF(\varphi(t))}{dt}}{\varphi'(t)}$

Если въ ур-іи (18) вмѣсто x подставить $\varphi(t)$, то получимъ для лѣвой части только что найденное выраженіе, а правая перейдетъ въ $f(\varphi(t))$:

$$\frac{\frac{dF(\varphi(t))}{dt}}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t))$$

откуда $\quad \dfrac{dF(\varphi(t))}{dt} = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$

$$dF(\varphi(t)) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot dt.$$

Интегрируя, получимъ

$$F(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \quad (29)$$

$F(\varphi(t))$ есть функція отъ t которая получается, если въ $F(x)$ замѣнить x черезъ $\varphi(t)$
Значитъ правая часть ур-нія (20) есть выраженіе въ которое переходитъ правая часть ур-нія (19) при замѣнѣ x на $\varphi(t)$ и мы получаемъ слѣдующую формулу для подстановки новой перемѣнной подъ знакомъ интеграла:

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt \quad \ldots\ldots (21)$$

Наоборотъ, если требуется вычислить интегралъ имѣющій видъ правой части ур-нія (21) то помощью введенія новой перемѣнной можно его представить въ видѣ лѣвой части. Чтобы обозначить, что правая часть ур-нія (21) есть первоначально данный интегралъ, подставимъ x вмѣсто t и u вмѣсто x; тогда:

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int f(u)\,du \quad \ldots\ldots (22)$$

причемъ $u = \varphi(x)$
Смотря по удобству, примѣняется или формула (21) или же формула (22)
<u>Примѣръ 1</u> $\int (a+bx)^n\,dx$.
Введемъ новую перемѣнную

$$a+bx=t.$$

тогда $x = \dfrac{t-a}{b}$; $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{b}$ и по формулѣ (21):

$$\int (a+bx)^n dx = \int \frac{t^n}{b}\,dt = \frac{1}{b}\int t^n dt = \frac{1}{b}\cdot\frac{t^{n+1}}{n+1} + C$$

Подставляя опять $a+bx$ вмѣсто t получимъ:

$$\int (a+bx)^n dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)} + C$$

Можно также воспользоваться формулою (22)
Выраженія, не измѣняющія тем

его умножить и раздѣлить на b

$$J=\int(a+bx)^n dx=\frac{1}{b}\int(a+bx)^n d(bx)$$

Кромѣ того дифференціалъ не измѣнится, если придать къ нему постоянное количество:

$$J=\frac{1}{b}\int(a+bx)^n d(a+bx)$$

Если теперь опять вмѣсто $a+bx$ ввести новую перемѣнную t, то получимъ опять тотъ же интегралъ, что и при предыдущемъ рѣшеніи.

Примѣръ II $\int\frac{x\,dx}{a+bx^2}$.

Раздѣлимъ и умножимъ на $2b$:

$$J=\int\frac{x\,dx}{a+bx^2}=\frac{1}{2b}\int\frac{2bx\,dx}{a+bx^2}=\frac{1}{2b}\int\frac{d(bx^2)}{a+bx^2}.$$

Дифференціалъ не измѣнится, если придать къ нему постоянное количество a:

$$J=\frac{1}{2b}\int\frac{d(a+bx^2)}{a+bx^2}$$

Вводя $a+bx^2=u$, получимъ:

$$J=\frac{1}{2b}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{2b}\ln u+c$$

Замѣняемъ опять u на $a+bx^2$:

$$\int\frac{x\,dx}{a+bx^2}=\frac{1}{2b}\ln(a+bx^2)+c.$$

Примѣръ III $\int tg x \cdot dx$.

$$J=\int tg x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx.$$

Но $d\cos x=-\sin x\,dx$, откуда

$$J=-\int\frac{-\sin x\,dx}{\cos x}=-\int\frac{d\cos x}{\cos x}$$

Подставляемъ новую перемѣнную $\cos x=u$

$$J=\int\frac{du}{u}=-\ln u+c=-\ln\cos x+C$$

$$\int tg x\,dx=-\ln\cos x+c$$

Примѣръ IV $\int Ctg\, x \cdot dx$

$$I = \int Ctg\, x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx.$$

Такъ какъ $d \sin x = \cos x \cdot dx$, то

$$I = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x}$$

Вводя новую перемѣнную $\sin x = u$, получаемъ:

$$I = \int \frac{du}{u} = \ln u + c = \ln \sin x + c$$

$$\int ctg\, x\, dx = \ln \sin x + c.$$

Примѣръ V $\int arc \sin x\, dx$

Для вычисленія этого интеграла воспользуемся формулою интегрированія по частямъ, причемъ принимаемъ $arc \sin x = \varphi(x)$, $1 = \psi'(x)$.

Подставляя эти значенія въ формулу (17) получаемъ:

$$I = arc \sin x \int dx - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left\{\int dx\right\} dx = x\, arc \sin x - \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Найдемъ значеніе второго слагаемаго:

$$I' = \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{2x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{d(-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

Вводимъ новую перемѣнную $1-x^2 = u$:

$$I' = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}}\, du = -\frac{1}{2}\, \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{1-x^2}$$

Подставивъ значеніе I' въ выраженіе I находимъ:

$$\int arc \sin x\, dx = x\, arc \sin x + \sqrt{1-x^2} + c$$

Примѣръ VI $\int arc\, tg\, x\, dx$.

Подставляя формулу (17): $arctg\, x = \varphi(x)$, $1 = \psi'(x)$ находимъ:

$$I = \int arctg\, x\, dx = x\, arctg\, x - \int \frac{1}{1+x^2}\, x\, dx.$$

$$I' = \int \frac{x}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x\, dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$$

$=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{2}\ln u=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

Отсюда $\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$

Интегрированіе раціональныхъ функцій

Общій видъ цѣлой раціональной функціи есть

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_{n-1}x+a_n,$$

гдѣ $a_0, a_1 \dots a_n$ постоянныя величины. Для опредѣленія интеграла этой функціи пользуемся теоремами объ интегралѣ суммы, о вынесеніи постояннаго множителя и интеграломъ степени:

$$\int f(x)dx=a_0\int x^n dx+a_1\int x^{n-1}dx+a_2\int x^{n-2}dx+\dots+a_{n-1}\int x\,dx+a_n\int dx=\frac{a_0}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_1}{n}x^n+\frac{a_2}{n-1}x^{n-1}+\dots+\frac{a_{n-1}}{2}x^2+a_nx+C$$

Итакъ, мы видимъ, что интегралъ всякой цѣлой раціональной функціи есть цѣлая раціональная функція.

Разсмотримъ теперь интегрированіе дробныхъ раціональныхъ функцій. Общій видъ такой функціи есть

$$F(x)=\frac{\psi(x)}{f(x)},$$

гдѣ $\psi(x)$ и $f(x)$ обозначаютъ цѣлыя раціональныя функціи. Положимъ, что первая изъ нихъ есть многочленъ m-ой степени, а второй многочленъ n-ой степени:

$$F(x)=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\dots+b_{m-1}x+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n}$$

При этомъ надо различать два случая: 1) степень числителя больше или равна степени знаменателя, 2) степень числителя меньше степени знаменателя.

1) $m \geqq n$ 2) $m < n$.

Первый случай, помощью непосредственнаго дѣленія можно всегда свести ко второму. Дѣйствительно, раздѣливъ числителя на знаменателя, мы можемъ представить данную дробную функцію въ видѣ двухъ слагаемыхъ, изъ которыхъ первое будетъ цѣлая функція, а второе дробная, причемъ степень числителя дробной функціи будетъ меньше степени знаменателя.

Слѣдовательно, намъ остается разсмотрѣть только интегрированіе дробныхъ раціональныхъ функцій вида 2/.

Докажемъ сначала вспомогательную теорему. Пусть данъ многочленъ $n^{ой}$ степени

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n \quad (23)$$

Коэффиціентъ при x^n мы предполагаемъ равнымъ единицѣ, ибо взявъ его за скобки, можемъ изслѣдованіе всякаго многочлена привести къ изслѣдованію многочлена (23).

Пусть при частномъ значеніи $x = c_1$ функція $f(x)$ обращается въ нуль, т. е. c_1 есть корень ур-нія $f(x) = 0$. Тогда, подставляя это значеніе въ ур-ніе (23), получимъ:

$$0 = c_1^n + a_1 c_1^{n-1} + a_2 c_1^{n-2} + \dots + a_{n-1} c_1 + a_n.$$

Вычитая это ур-ніе изъ ур-нія (23) имѣемъ:

$$f(x) = x^n - c_1^n + a_1(x^{n-1} - c_1^{n-1}) + a_2(x^{n-2} - c_1^{n-2}) + \dots$$
$$+ a_{n-1}(x - c_1)$$

Изъ алгебры мы знаемъ, что разность сте-
пеней дѣлится безъ остатка на разность
ихъ основаній, слѣдовательно всѣ члены
послѣдняго многочлена дѣлятся безъ остат-
ка на $x-c_1$;
Отсюда, взявъ $x-c$ за скобки получимъ:
$f(x)=(x-c_1)\{x^{n-1}+x^{n-2}c_1+\dots+c_1^{n-1}+a_1(x^{n-2}+x^{n-3}c_1+\dots c_1^{n-2})+\dots+a_{n-1}\}$
Разсматривая выраженіе въ скобкахъ, заклю-
чаемъ, что самая высшая степень x есть
$n-1$. Такимъ образомъ функція $f(x)$ принимаетъ видъ

$$f(x)=(x-c_1)\,f_1(x)$$

гдѣ $f_1(x)$ есть многочленъ степени $n-1$.
И такъ, если многочленъ n-ой степени при
нѣкоторомъ значеніи $x=c$, обращается въ
нуль, то его можно разложить на два мно-
жителя, изъ которыхъ одинъ будетъ $x-c$,
а другой многочленъ степени низшей на
единицу меньше первоначальнаго многочлена.
Такимъ образомъ если $f(x)$ изображаетъ
многочленъ n-ой степени, то

$$f_1(x)=x^{n-1}+e_1x^{n-2}+e_2x^{n-3}+\dots+e_{n-1}.$$

Положимъ теперь, что c_2 есть такое зна-
ченіе x, при которомъ функція $f_1(x)$ обраща-
ется въ нуль. Въ такомъ случаѣ $f_1(x)$ можно
представить въ видѣ произведенія:

$$f_1(x)=(x-c_2)\,f_2(x),$$

гдѣ $f_2(x)$ есть многочленъ степени $n-2$
Подставляя значеніе $f_1(x)$ въ ур-ніе (24)

получаемъ:

$$f(x) = (x - c_1)(x - c_2)\, f_2(x) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (25)$$

Если $f(x)$ обращается въ нуль при значеніи $x = c_2$, то по формулѣ (24) и $f_1(x)$ обратится въ нуль при этомъ значеніи x, т. е. c_2 есть корень не только ур-нія $f_1(x) = 0$, но также ур-нія $f(x) = 0$.

Продолжая подобныя разсужденія, мы можемъ представить нашу функцію въ видѣ:

$$f(x) = (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) \ldots (x - c_m) \ldots \quad (26)$$

гдѣ $c_1, c_2, c_3, \ldots c_m$ суть корни ур-нія $f(x) = 0$.

Конечно, если между корнями этого уравненія встрѣчаются равные, то и нѣкоторые изъ множителей разложенія будутъ равными между собою.

Пользуясь доказанной теоремой, данную дробную функцію

$$F(x) = \frac{\varphi(x)}{f(x)}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27)$$

гдѣ степень числителя меньше степени знаменателя, можно разложить на сумму простѣйшихъ дробей, интегрированіе которыхъ не представитъ никакого затрудненія.

Положимъ, что ур-ніе $f(x) = 0$ имѣетъ α-кратный корень c_1, такъ что знаменатель можетъ представиться въ видѣ произведенія двухъ множителей:

$$f(x) = (x - c_1)^{\alpha} f_1(x) \quad . \; . \; . \; . \quad (28)$$

Въ такомъ случаѣ функцію (27) можно

разложить на два слагаемыхъ:

$$F(x) = \frac{A_1}{(x-c_1)^\alpha} + \frac{\varphi_1(x)}{(x-c_1)^{\alpha-1} f_1(x)}, \qquad (29)$$

причемъ второй дроби степень числителя опять меньше степени знаменателя.

Докажемъ, что такое разложеніе всегда возможно

Подставляя въ ур-іе (27) значеніе $f(x)$ изъ ур-іе (28) получимъ:

$$F(x) = \frac{\varphi(x)}{(x-c_1)^\alpha f_1(x)}$$

Прибавимъ и вычтемъ въ числителѣ $A_1 f_1(x)$: $F(x) = \frac{\varphi(x) + A_1 f_1(x) - A_1 f_1(x)}{(x-c_1)^\alpha f_1(x)}$

Эту дробь можно разложить на два слагаемыхъ:

$$F(x) = \frac{A_1}{(x-c_1)^\alpha} + \frac{\varphi(x) - A_1 f_1(x)}{(x-c_1)^\alpha f_1(x)} \qquad (30)$$

Это выраженіе справедливо для всякого значенія A_1. Положимъ теперь, что A_1 есть постоянная величина, именно

$$A_1 = \frac{\varphi(c_1)}{f_1(c_1)}$$

откуда $\varphi(c_1) = A_1 f_1(c_1)$

Сравнивая это выраженіе съ числителемъ второго слагаемаго въ ур-іи (30) видимъ, что $x = c_1$ обращаетъ въ нуль этого числителя.

Слѣдовательно, мы можемъ его разложить на два множителя:

$$\varphi(x) - A_1 f_1(x) = (x-c_1)\varphi_1(x);$$

Причемъ степень $\varphi_1(x)$ на единицу меньше

степени многочлена $\varphi(x) - A_1 f(x)$. Такъ какъ степень $\varphi(x)$ по предположенію меньше степени $f(x)$ и $f(x) = (x-c)^{\alpha} f_1(x)$ причемъ α цѣлое положительное число, то и степень $\varphi(x)$ меньше степени $(x-c_1)^{\alpha-1} f_1(x)$.
Подставляя найденное значеніе числителя $\varphi(x)$ въ ур-ніе (30) получаемъ ур-ніе (29), которое требовалось доказать:

$$F x = \frac{A}{(x-c)^{\alpha}} + \frac{\varphi_1(x)}{(x-c_1)^{\alpha-1} f_1(x)}$$

Очевидно, вторую дробь можно разложить такимъ-же образомъ; тогда получимъ:

$$F(x) = \frac{A_1}{(x-c_1)^{\alpha}} + \frac{A}{(x-c_1)^{\alpha-1}} + \frac{\varphi_2(x)}{(x-c_1)^{\alpha-2} f_1(x)}$$

Продолжая такимъ образомъ, мы можемъ разложить дробную функцію $F(x)$ на сумму дробей вида:

$$F(x) = \frac{A_1}{(x-c_1)^{\alpha}} + \frac{A_2}{(x-c_1)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_\alpha}{x-c_1} + \frac{\varphi_\alpha(x)}{f_1(x)} \cdots (31)$$

причемъ $A_1, A_2 \ldots A_\alpha$ постоянныя величины и степень многочлена $\varphi_\alpha(x)$ меньше степени $f_1(x)$, и $f_1(x)$ не содержитъ множителя $x-c_1$. Эту послѣднюю дробь $\frac{\varphi_\alpha(x)}{f_1(x)}$ можно разложить подобнымъ образомъ и т. д.
Особенно просто получается подобное разложеніе, если знаменатель имѣетъ лишь различныхъ множителей первой степени:

$$f(x) = (x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)\cdots(x-c_n)$$

Пользуясь уравненіями (31) находимъ:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{x-c_1} + \frac{\varphi_1(x)}{(x-c_2)(x-c_3)\cdots(x-c_n)} = \cdots$$

$$\frac{A_1}{x-c_1} + \frac{B_2}{x-c_2} + \frac{B_3}{x-c_3} + \cdots + \frac{B_n}{x-c_n}$$

Помощью этой формулы легко найти интегралъ дробныхъ функцій такого свойства:

$$\int\frac{\varphi(x)}{f(x)}\,dx = A_1\int\frac{dx}{x-c_1} + B_2\int\frac{dx}{x-c_2} + \cdots B_n\int\frac{dx}{x-c_n}$$

Мы знаемъ, что дифференціалъ функціи не измѣнится, если изъ него вычесть постоянную величину; тогда

$$\int\frac{\varphi(x)}{f(x)}\,dx = A_1\int\frac{d(x-c_1)}{x-c_1} + B_2\int\frac{d(x-c_2)}{x-c_2} + \cdots + B_n\int\frac{d(x-c_n)}{x-c_n}$$

По второй формулѣ таблицы на стр. 341 находимъ:

$$\int\frac{\varphi(x)}{f(x)}\,dx = A_1\ln(x-c_1) + B_2\ln(x-c_2) + \cdots B_n\ln(x-c_n) + C$$

Примѣръ 1. Пусть требуется интегрировать дробную функцію

$$F(x) = \frac{x^6+3x^5-4x^4-10x^3+9x^2+8x-2}{x^3+6x^2+11x+6}$$

Дѣлимъ числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{l|l}
x^6+3x^5-4x^4-10x^3+9x^2+8x-2 & x^3+6x^2+11x+6 \\
\underline{x^6+6x^5+11x^4+6x^3} & x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3 \\
\quad -3x^5-15x^4-16x^3+9x^2+8x-2 & \\
\quad \underline{-3x^5-18x^4-33x^3-18x^2} & \\
\qquad +3x^4+17x^3+27x^2+8x-2 & \\
\qquad \underline{3x^4+18x^3+33x^2+18x} & \\
\qquad\quad -x^3-6x^2-10x-2 & \\
\qquad\quad -x^3-6x^2-11x-6 & \\
\qquad\qquad x+4 &
\end{array}$$

Отсюда наша дробная функція можетъ быть представлена въ видѣ

$$F(x) = (x-1)^3 + \frac{x+4}{x^3+6x^2+11x+6}$$

гдѣ степень числителя втораго слагаемаго меньше степени знаменателя. Разлагая теперь знаменателя на множителей, имѣемъ

$$F_1(x) = \frac{x+4}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

Отсюда эту дробь можно разложить на три простѣйшія слѣдующаго вида:

$$\frac{x+4}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x+2} + \frac{A_3}{x+3} \dots (32)$$

Для вычисленія A_1, A_2, A_3 освобождаемъ ур-ніе (32) отъ знаменателя

$$x+4 = A_1(x+2)(x+5) + A_2(x+1)(x+3) + A_3(x+1)(x+2)$$

Подставимъ сюда вмѣсто x тѣ значенія его, которыя обращаютъ въ нуль знаменатель дроби $F_1(x)$. Тогда получимъ:

$x = 1 \quad 3 = 2A_1, \quad A_1 = \frac{3}{2}$

$x = 2 \quad 2 = -A_2, \quad A_2 = -2$

$x = 3 \quad 1 = 2A_3, \quad A_3 = \frac{1}{2}$

Теперь замѣнимъ A_1, A_2, A_3 въ ур-ніе (32) ихъ значеніями

$$F_1(x) = \frac{3/2}{x+1} - \frac{2}{x+2} + \frac{1/2}{x+3}$$

Слѣдовательно

$$F(x) = (x-1)^3 \frac{3/2}{x+1} - \frac{2}{x+2} + \frac{1/2}{x+3}$$

Теперь легко найти интегралъ функціи $F(x)$

$$\int F(x)\,dx = \int (x-1)^3 dx + \tfrac{3}{2}\int \frac{dx}{x+1} - 2\int \frac{dx}{x+2} + \tfrac{1}{2}\int \frac{dx}{x+3} =$$

$$= \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{3}{2}\ln(x+1) - 2\ln(x+2) + \frac{1}{2}\ln(x+3) + C =$$

$$= \frac{(x-1)^4}{4} + \ln(x+1)^{\frac{3}{2}} - \ln(x+2)^2 + \ln(x+3)^{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= \frac{(x-1)^4}{4} + \ln\frac{(x+1)^{3/2}(x+3)^{1/2}}{(x+2)^2} + C = \frac{(x-1)^4}{4} + \ln\frac{\sqrt{(x+1)^3(x+3)}}{(x+2)^2} + C$$

Примѣръ II. Разсмотримъ теперь случай, когда знаменатель имѣетъ множителя въ степени большей единицы:

$$F(x) = \frac{x^3+2}{x^4-2x^3+2x-1} = \frac{x^3+2}{(x+1)(x-1)^3}$$

По формулѣ (29) имѣемъ:

$$F(x) = \frac{A_1}{(x-1)^3} + \frac{\varphi_1(x)}{(x+1)(x-1)^2} \quad \ldots\ldots (33)$$

Изъ двухъ послѣднихъ ур-ній находимъ:

$$x^3+2 = A_1(x+1) + \varphi_1(x)(x-1)$$

Придаемъ x частное значеніе $x=1$ тогда получимъ:

$$3 = 2A_1\ ;\ A_1 = \frac{3}{2}$$

Отсюда, подставивъ значеніе A_1 въ предыдущее ур-ніе получаемъ:

$$x^3+2 = \tfrac{3}{2}x + \tfrac{3}{2} + \varphi_1(x)(x-1).$$

Рѣшаемъ это ур-ніе относительно $\varphi_1(x)$:

$$\varphi_1(x) = \frac{x^3 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}}{x-1} = x^2 + x - \tfrac{1}{2}$$

Замѣняемъ въ ур-ніи (33) A_1 и $\varphi_1(x)$ ихъ значеніями:

$$F(x) = \frac{3/2}{(x-1)^3} + \frac{x^2+x-\frac{1}{2}}{(x+1)(x-1)^2} \quad \ldots (34)$$

Второе слагаемое можно опять разложить по общей формулѣ:

$$\frac{x^2+x-\frac{1}{2}}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{\varphi_2(x)}{(x-1)(x+1)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

Чтобы опредѣлить A_2, освобождаемъ ур-ніе отъ знаменателя:

$$x^2+x-\frac{1}{2} = A_2(x+1)+\varphi_2(x)(x-1).$$

Если сюда подставить $x=1$, то второе слагаемое правой части обратится въ нуль, и мы получимъ:

$$\frac{3}{2} = 2A_2;\quad A_2 = \frac{3}{4}.$$

Для опредѣленія $\varphi_2(x)$ подставляемъ значеніе A_2 въ предыдущее ур-ніе

$$x^2+x-\frac{1}{2} = \frac{3}{4}(x+1)+\varphi_2(x)(x-1)$$

Отсюда $\varphi_2(x) = \dfrac{x^2+\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}}{x-1} = x+\frac{5}{4}$

Замѣнивъ въ ур-ніи (35) A_2 и $\varphi_2(x)$ ихъ значеніями, получимъ разложеніе дроби на два слагаемыя. Подставляя затѣмъ полученное разложеніе въ ур-ніе (34) получимъ

$$\frac{x^3+2}{x^4-2x^3+2x-1} = \frac{\frac{3}{2}}{(x-1)^3}+\frac{\frac{3}{4}}{(x-1)^2}+\frac{x+\frac{5}{4}}{(x-1)(x+1)}$$

Послѣднюю дробь можно еще разложить такимъ же образомъ.

$$\frac{x+\frac{5}{4}}{(x-1)(x+1)} = \frac{A_3}{x-1}+\frac{A_4}{x+1}$$

Для опредѣленія A_3 и A_4 уничтожаемъ знаменателя:

$$x+\frac{5}{4} = A_3(x+1)+A_4(x-1)$$

При $x=1$ уничтожаемъ второе слагаемое:

$$\frac{9}{4} = 2A_3;\quad A_3 = \frac{9}{8}.$$

При $x=-1$ первое слагаемое обращается въ нуль:

$\frac{1}{4} = 2A_4,\quad B_4 = -\frac{1}{8}$

Итакъ нашу дробную функцію можно разложить на 4 простѣйшія слагаемыя

$$\frac{x^3+2}{x^4-2x^3+2x-1} = \frac{3/2}{(x-1)^3} + \frac{3/4}{(x-1)^2} + \frac{9/8}{x-1} - \frac{1/8}{x-1}$$

Теперь интегрированіе этой функціи не представляетъ никакого затрудненія:

$$\int\frac{x^3+2}{x^4-2x^3+2x-1}dx = \frac{3}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^3} + \frac{3}{4}\int\frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{9}{8}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{8}\int\frac{dx}{x+1} =$$

$$= \frac{3}{2}\int(x-1)^{-3}d(x-1) + \frac{3}{4}\int(x-1)^{-2}d(x-1) + \frac{9}{8}\int\frac{d(x-1)}{x-1} - \frac{1}{8}\int\frac{d(x+1)}{x+1} =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{(x-1)^{-2}}{-2} + \frac{3}{4}\frac{(x-1)^{-1}}{-1} + \frac{9}{8}\ln(x-1) - \frac{1}{8}\ln(x+1) + C =$$

$$= -\frac{3}{4(x-1)^2} - \frac{3}{4(x-1)} + \frac{1}{8}\{\ln(x-1)^9 - \ln(x+1)\} + C =$$

$$= -\frac{3x}{4(x-1)^2} + \frac{1}{8}\ln\frac{(x-1)^9}{x+1} + C$$

Существуетъ еще другой способъ опредѣленія числителей простѣйшихъ дробей, такъ называемый способъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, который состоитъ въ слѣдующемъ.

По общей формулѣ (31) намъ извѣстно, что наша дробная функція $F(x)$ разлагается на простѣйшія дроби слѣдующаго вида:

$$\frac{x^3+2}{x^4-2x^3+2x-1} = \frac{A_1}{(x-1)^3} + \frac{A_2}{(x-1)} + \frac{A_3}{x-1} + \frac{B_1}{x+1}$$

Для опредѣленія постоянныхъ A_1, A_2, A_3, B_1 освобождаемъ это равенство отъ знаменателей

$$x^3+2 = A_1(x+1) + A_2(x-1)(x+1) + A_3(x-1)^2(x+1) + B_1(x-1)^3$$

Раскрываемъ скобки и группируемъ по степенямъ x:

$x^3+2 = (A_3+B_1)x^3+(A_2-A_3-3B_1)x^2+(A_1-A_3+3B_1)x+A_1-A_2+A_3-B_1$

Послѣднее равенство справедливо для всѣхъ значеній x, т.е. правая часть есть только другой видъ лѣвой, значитъ коэффиціенты соотвѣтственныхъ степеней x лѣвой и правой части равны между собою. Приравнявъ ихъ, мы получимъ систему 4-хъ ур-ній, изъ которыхъ опредѣлимъ искомыя значенія A_1, A_2, A_3, B_1:

$$1 = A_3 + B_1 \qquad A_1 = \tfrac{3}{2}$$
$$0 = A_2 - A_3 - 3B_1 \qquad A_2 = \tfrac{3}{4}$$
$$0 = A_1 - A_3 + 3B_1 \qquad A_3 = \tfrac{9}{8}$$
$$2 = A_1 - A_2 + A_3 - B_1 \qquad B_1 = -\tfrac{1}{8}$$

Разложеніе дробной раціональной функціи $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ на простѣйшія дроби было основано на разложеніи знаменателя $f(x)$ на множителей вида $x-c$, гдѣ c, означаетъ корень ур-нія $f(x)=0$. Если между корнями этого ур-нія встрѣчаются мнимые, то разложеніе дроби $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, хотя возможно, но получается въ мнимомъ видѣ. Чтобы и въ этомъ случаѣ получить результатъ въ вещественномъ видѣ, мы примѣнимъ другого рода разложеніе. Въ алгебрѣ доказывается, что если ур-ніе съ вещественными коэффиціентами $f(x)=0$ имѣетъ мнимый корень

$$\alpha+\beta\sqrt{-1},$$

гдѣ α и β величины вещественныя, то непремѣнно существуетъ другой

корень вида

$$\alpha - \beta\sqrt{-1}$$

Такія двѣ мнимыя величины, различающіяся только знакомъ при мнимомъ слагаемомъ, называется сопряженно-мнимыми. Соотвѣтственно этимъ двумъ корнямъ, при разложеніи функціи $f(x)$ встрѣчаются множители $[x-(\alpha+\beta\sqrt{-1})]$ и $[x-(\alpha-\beta\sqrt{-1})]$. Перемножая ихъ получаемъ:

$$[x-(\alpha+\beta\sqrt{-1})][x-(\alpha-\beta\sqrt{-1})]=[(x-\alpha)-\beta\sqrt{-1}][(x-\alpha+\beta\sqrt{-1}]=$$
$$=(x-\alpha)^2+\beta^2,$$ т.е. величину вещественную.

Такимъ образомъ видимъ, что если $f(x)=0$ имѣетъ мнимые корни, то $f(x)$ можно разложить на вещественныхъ множителей первой и второй степени. Конечно, и эти мнимые корни могутъ получиться нѣсколько разъ, такъ что въ общемъ случаѣ:

$$f(x)=\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^n f_1(x),$$

гдѣ многочленъ $f_1(x)$ не содержитъ множителя $(x-\alpha)^2+\beta^2$

Значитъ дробную функцію можно представить въ видѣ

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{\varphi(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n f_1(x)}$$

Можно доказать, что въ такомъ случаѣ эта функція можетъ быть разложена на два слагаемыхъ вида

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{p+qx}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^n}+\frac{\varphi_1(x)}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^{n-1}f_1(x)}$$

гдѣ p и q вещественныя величины и $\varphi_1(x)$ нѣкоторый цѣлый многочленъ.

Примѣръ $\frac{x^4}{(x^2+1)^2(x+1)}$

Такъ какъ приравнявъ знаменатель нулю мы получаемъ двукратный мнимый корень $x = \pm\sqrt{-1}$, то для разложенія мы примѣняемъ формулу (36)

$$\frac{x^4}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{p+qx}{(x^2+1)^2} + \frac{\varphi_1(x)}{(x^2+1)(x+1)} \dots (37)$$

Чтобы найти p и q освобождаемъ ур-ніе отъ знаменателя:

$$x^4 = (p+qx)(x+1) + \varphi_1(x)(x^2+1) \dots (38)$$

Теперь подставляемъ сюда вмѣсто x одинъ изъ корней ур-нія $x^2+1=0$ напр. $x=+\sqrt{-1}$. Тогда находимъ:

$$1 = (p+q\sqrt{-1})(\sqrt{-1}+1) = p\sqrt{-1} - q + p + q\sqrt{-1}$$

$$1 = p - q + (p+q)\sqrt{-1}.$$

По извѣстной теоріи алгебры мы знаемъ, что если у насъ есть равенство въ которое входятъ дѣйствительныя и мнимыя величины, то это равенство возможно только тогда, когда мнимыя и вещественныя величины лѣвой части соотвѣтственно равны мнимымъ и вещественнымъ величинамъ правой части. Отсюда необходимо

$$1 = p - q; \quad 0 = p + q.$$

Складывая эти ур-нія и вычитывая первое изъ второго, находимъ:

$$2p = 1 \qquad 2q = -1$$

$$p = \frac{1}{2} \qquad q = -\frac{1}{2}$$

Подставляемъ эти значенія въ ур-ніе (38)

$$x^4 = \frac{1}{2}(1-x)(x+1) + \varphi_1(x)(x^2+1)$$

$$x^4 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} = \varphi_1(x)(x^2+1)$$

Откуда $\varphi_1(x) = \frac{x^4 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}}{x^2+1} = x^2 - \frac{1}{2}$

Подставляя значенія p, q и $\varphi_1(x)$ въ ур-ніе (37), получимъ

$$\frac{x^4}{(x^2+1)^2(x+1)} = \frac{1}{2}\,\frac{1-x}{(x^2+1)^2} + \frac{x^2-\frac{1}{2}}{(x^2+1)(x+1)} \qquad (39)$$

Второе слагаемое опять можемъ разложить такимъ же образомъ:

$$\frac{x^2-\frac{1}{2}}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{p_1+q_1x}{x^2+1} + \frac{\varphi_2(x)}{x+1} \ldots (40)$$

Освобождаемъ отъ знаменателей:

$$x^2 - \frac{1}{2} = (p_1+q_1x)(x+1) + \varphi_2(x)(x^2+1) \ldots (41)$$

Для опредѣленія p_1 и q_1 подставляемъ сюда одинъ изъ корней $x = +\sqrt{-1}$, $x = -\sqrt{-1}$, напр. $x = +\sqrt{-1}$

$$-\frac{3}{2} = (p_1 + q_1\sqrt{-1})(\sqrt{-1}+1)$$

$$-\frac{3}{2} = p_1 - q_1 + (p_1+q_1)\sqrt{-1}$$

Дѣйствительная и мнимая части должны быть равны между собою:

$$-\frac{3}{2} = p_1 - q_1; \quad 0 = p_1 + q_1;$$

Складывая послѣднія ур-нія и вычитая первое изъ второго, имѣемъ

$$2p_1 = -\frac{3}{2} \qquad 2q_1 = \frac{3}{2}$$

$$p_1 = -\frac{3}{4} \qquad q_1 = \frac{3}{4}$$

Подставляемъ найденныя значенія въ уравненіе (41):

$x^2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}(x^2 - 1) + \varphi_2(x)(x^2+1)$

$\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} = \varphi_2(x)(x^2+1); \quad \varphi_2(x) = \frac{1}{4}$

Если теперь замѣнить p, q и $\varphi_2(x)$ въ ур-нiи (40) ихъ значенiями и полученное выраженiе подставить въ ур-нiе (39), то получимъ:

$$\frac{x^4}{(x^2+1)^2(x+1)} = \frac{1}{2}\frac{1-x}{(x^2+1)^2} - \frac{3}{4}\frac{1-x}{x^2+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{x+1} \quad \ldots (42)$$

Можно было бы и въ этомъ случаѣ примѣнить способъ неопредѣленныхъ коэффицiентовъ.

Изъ формулы (36) ясно, что если знаменатель дробной функцiи обращается въ нуль при мнимыхъ значенiяхъ аргумента x, то интегрированiе этой функцiи сводится къ отысканiю интеграловъ вида:

$$\int \frac{p+qx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} \cdot dx$$

Для вычисленiя такого интеграла введемъ новую перемѣнную: $x-\alpha = y$, откуда $x = \alpha + y$, $dx = dy$.

$$\int \frac{p+qx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} dx = \int \frac{(p+q\alpha)+qy}{(y^2+\beta^2)^n} dy =$$

$$= (p+q\alpha)\int \frac{dy}{(y^2+\beta^2)^n} + q\int \frac{y\,dy}{(y^2+\beta^2)^n}$$

Вычислимъ каждый интегралъ отдѣльно, причемъ сначала возьмемъ второй интегралъ:

$$J_2 = \int \frac{y\,dy}{(y^2+\beta^2)^n} = \frac{1}{2}\int \frac{2y\,dy}{(y^2+\beta^2)^n} = \frac{1}{2}\int \frac{d(y^2)}{(y^2+\beta^2)^n} = \frac{1}{2}\int \frac{d(y^2+\beta^2)}{(y^2+\beta^2)^n}$$

Подставляя $y^2+\beta^2=t$:

$$J_2=\frac{1}{2}\int t^{-n}dt=\frac{1}{2}\frac{t^{-n+1}}{-n+1}+C=-\frac{1}{2(n-1)t^{n-1}}+C=$$

$$=-\frac{1}{2(n-1)(y^2+\beta^2)^{n-1}}+C$$

Первый интегралъ преобразуется слѣдующимъ образомъ:

$$J_1=\int\frac{dy}{(y^2+\beta^2)^n}=\int\frac{dy}{\left[\beta^2\left(\frac{y^2}{\beta^2}+1\right)\right]^n}=\int\frac{dy}{\beta^{2n}\left(\frac{y^2}{\beta^2}+1\right)^n}=$$

$$=\frac{1}{\beta^{2n-1}}\int\frac{d\left(\frac{y}{\beta}\right)}{\left\{\left(\frac{y}{\beta}\right)^2+1\right\}^n}.$$

Замѣняя $\frac{y}{\beta}$ черезъ u, получимъ

$$J_1=\frac{1}{\beta^{2n-1}}\int\frac{du}{(u^2+1)^n}.$$

Такимъ образомъ опредѣленіе перваго интеграла J_1 всегда сводится къ опредѣленію интеграла вида $\int\frac{dx}{(x^2+1)^n}$

Такъ какъ $1=x^2+1-x^2$, то можемъ написать:

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^n}=\int\frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^n}dx=\int\frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}-\int\frac{x^2}{(x^2+1)^n}dx \quad (43$$

Для преобразованія втораго слагаемаго, пользуемся формулою интегрированія по частямъ (стр 343) въ которой полагаемъ $\varphi(x)=x$, $\psi(x)=\frac{x}{(x^2+1)^n}$

Тогда

$$\int\psi(x)dx=\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^n}=\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{(x^2+1)^n}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^n}$$

Вводимъ новую перемѣнную $x^2+1=y$

$$\int\psi(x)dx=\frac{1}{2}\int y^{-n}dy=\frac{1}{2}\frac{y^{-n+1}}{-n+1}=-\frac{1}{2(n-1)y^{n-1}}=-\frac{1}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}}$$

Отсюда, по формулѣ интегрированія по частямъ, имѣемъ:

$$\int\frac{x^2dx}{(x^2+1)^n}=-\frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}}+\frac{1}{2(n-1)}\int\frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}$$

Подставляя это выраженіе въ формулу (43) и замѣчая, что $1-\frac{1}{2(n-1)}=\frac{2n-3}{2n-2}$, получаемъ:

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^n}=\frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\int\frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}. \quad (44)$$

Итакъ, интегрированіе нашей функціи сводится къ вычисленію интеграла функціи того-же вида, но показатель которой уменьшенъ на единицу

Примѣръ I: $n=2$. $\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=$

$$=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+c$$

Примѣръ II $n=3$ $\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}=\frac{x}{4(x^2+1)^2}+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$

Подставляя сюда значеніе второго слагаемаго изъ предыдущаго примѣра, получаемъ:

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}=\frac{x}{4(x^2+1)^2}+\frac{3}{8}\frac{x}{(x^2+1)}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}x+c.$$

Какъ примѣръ всего пройденнаго на послѣднихъ страницахъ возьмемъ интегралъ $\int\frac{x^4}{(x^2+1)^2(x+1)}dx$. По формулѣ (42):

$$\int\frac{x^4}{(x^2+1)^2(x+1)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1+x}{(x^2+1)^2}dx-\frac{3}{4}\int\frac{1-x}{x^2+1}dx+$$
$$+\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+1}dx \quad \ldots\ldots\ldots (45)$$

Найдемъ каждый интегралъ отдѣльно. Первый интегралъ можемъ разложить на два слагаемыхъ

$$\int\frac{1-x}{(x^2+1)^2}\,dx=\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}-\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}\qquad(46)$$

Интегралъ перваго слагаемаго мы только что вычислили (формулу !) Интегралъ втораго слагаемаго получимъ:

$$\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

Вводя переменную $x^2+1=u$ находимъ

$$\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\int u^{-2}du=-\frac{1}{2}u^{-1}=-\frac{1}{2u}=-\frac{1}{2(x^2+1)}$$

Подставляя значенія обоихъ слагаемыхъ въ ур-ніе (46):

$$\int\frac{1-x}{(x^2+1)^2}\,dx=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2(x^2+1)}=$$

$$=\frac{x+1}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x\qquad(47)$$

Опредѣлимъ теперь второй интегралъ правой части равенства (45):

$$\int\frac{1-x}{x^2+1}\,dx=\int\frac{dx}{x^2+1}-\int\frac{x\,dx}{x^2+1}\qquad(48)$$

Интегралъ перваго слагаемаго равенъ $\operatorname{arctg}x$; остается найти интегралъ втораго слагаемаго:

$$\int\frac{x\,dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln u\ \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

Замѣняя въ ур-ніи (48) оба слагаемыя ихъ значеніями, получимъ:

$$\int\frac{1-x}{x^2+1}\,dx=\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\quad(49)$$

Наконецъ интегралъ третьей дроби въ ур-ніи (45) будетъ

$$\int\frac{dx}{x+1}=\int\frac{d(x+1)}{x+1}=\ln(x+1)\quad(50)$$

Теперь, подставивъ въ ур-ніе (45) значеніе интеграловъ правой части изъ ур-ній (47), (49), (50) находимъ искомый интегралъ:

$$\int\frac{x^4}{(x^2+1)^2(x+1)}dx=\frac{1}{2}\left\{\frac{x+1}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x\right\}-\frac{3}{4}\left\{\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right\}+\frac{1}{4}\ln(x+1)+c=\frac{x+1}{4(x^2+1)}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+$$
$$+\frac{3}{8}\ln(x^2+1)+\frac{1}{4}\ln(x+1)+c$$

Интегрированіе ирраціональныхъ функцій

Самый простой случай ирраціональной функціи есть тотъ, когда извлекается корень квадратный и подъ корнемъ находится многочленъ первой степени. Общій видъ такой функціи есть

$$f(x,\sqrt{a+bx})$$

Интегралъ такой функціи легко опредѣлить помощью подстановки новой перемѣнной:

$$\sqrt{a+bx}=t,\ \text{откуда}\ x=\frac{t^2-a}{b},\ \frac{dx}{dt}=\frac{2t}{b}$$

Подставляя эти значенія, получаемъ

$$\int f(x,\sqrt{a+bx})dx=\int f\left(\frac{t^2-a}{b},t\right)\frac{2t}{b}dt=$$
$$=\int R(t)dt,$$

гдѣ $R(t)$ есть раціональная функція отъ t

Слѣдовательно интегрированіе ирраціональной функціи мы привели къ интегрированію функціи

раціональной.

Примѣръ $\int x\sqrt{a+x}\,dx$

Введемъ новую перемѣнную $\sqrt{a+x}=t$,

$$x=t^2-a,\ \frac{dx}{dt}=2t.$$

По постановкѣ этихъ значеній въ первоначально данный интегралъ получаемъ

$$\int x\sqrt{a+x}\,dx=\int(t^2-a)t.2t\,dt=\int(2t^4-2at^2)dt=$$
$$=2\int t^4dt-2a\int t^2dt=\frac{2}{5}t^5\ \frac{2}{3}at^3+c.$$

Подставляя сюда опять значеніе t, находимъ:

$$\int x\sqrt{a+x}\,dx=\frac{2}{5}(a+x)^2\sqrt{a+x}-\frac{2}{3}a(a+x)\sqrt{a+x}+C=$$
$$=\frac{2}{15}(3x^2+ax-2a^2)\sqrt{a+x}+C.$$

Если степень извлекаемаго корня выше второй, а подъ корнемъ опять находится многочленъ первой степени, то интегрированіе такой функціи производится совершенно такимъ-же образомъ.

Поэтому перейдемъ теперь къ интегрированію такихъ выраженій, въ которыхъ подкоренная величина есть многочленъ высшей степени, именно второй.

Разсмотримъ нѣсколько частныхъ случаевъ.

Примѣръ I $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

Этотъ интегралъ имѣетъ нѣкоторое сходство съ интеграломъ:

$$\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\text{arc Sin}\,u+c.$$

Приводимъ данный интегралъ въ такому виду

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}}=\int\frac{dx}{a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}=\int\frac{d\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$$

Подставляя теперь $\frac{x}{a}=u$ находимъ

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\arcsin u+c$$

Замѣняя опять u его значеніемъ получимъ

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+c \qquad (51)$$

<u>Примѣръ II</u> $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$

Чтобы привести интегрированіе этой функціи къ интегрированію раціональной функціи, вводимъ новое обозначеніе:

$$\sqrt{x^2+a}=t-x \text{ откуда } x=\frac{t^2-a}{2t},$$

$$\sqrt{x^2+a}=t-\frac{t^2-a}{2t}=\frac{t^2+a}{2t},\ \frac{dx}{dt}=\frac{2t.2t-2(t^2-a)}{4t^2}=$$
$$=\frac{t^2+a}{2t^2}$$

Пользуясь этими обозначеніями находимъ:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\int\frac{2t}{t^2+a}\cdot\frac{t^2+a}{2t^2}dt=\int\frac{dt}{t}=\ln t+c$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)+c \quad \ldots (52)$$

Докажемъ теперь общую формулу:

$$\int\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}=\varphi(x)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}+K\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} \quad (53)$$

причемъ $f(x)$ означаетъ цѣлый многочленъ $n^{\text{ой}}$ степени, $\varphi(x)$ цѣлый многочленъ $(n-1)$ степени, постоянное количество

Подставивъ вмѣсто $f(x)$ и $\varphi(x)$ общіи

видъ многочленовъ $n^{\text{ой}}$ и $(n-1)^{\text{ой}}$ степени получимъ:

$$\int \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}\,dx =$$
$$= (b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3} + \dots + b_{n-2} x + b_{n-1})\sqrt{Ax^2+2Bx+C} + K\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$$

Наша теорема будетъ доказана, если намъ удастся доказать, что всегда можно найти однозначно опредѣленныя значенія коэффиціентовъ $b_0, b_1 \dots b_{n-1}, k$.

Если наша формула справедлива, то функція правой части представляетъ только другой видъ функціи лѣвой части. Но если обѣ функціи тождественны, то и производныя ихъ должны быть тождественны. Поэтому продифференцировавъ обѣ части равенства получимъ:

$$\frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} =$$
$$(b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3} + \dots + b_{n-2} x + b_{n-1}) \frac{Ax+B}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} +$$
$$+ [(n-1) b_0 x^{n-2} + (n-2) b_1 x^{n-3} + \dots + 2b_{n-3} x + b_{n-2}]\sqrt{Ax^2+2Bx+C} + \frac{K}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$$

Освобождаемъ ур-ніе отъ знаменателя.

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n =$$
$$= (b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3} + \dots + b_{n-2} x + b_{n-1})(Ax+B) +$$
$$+ [(n-1) b_0 x^{n-2} + (n-2) b_1 x^{n-3} + \dots + 2b_{n-3} x + b_{n-2}](Ax^2+2Bx+C) + K$$

Раскрываемъ скобки:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n =$$
$$= b_0 A x^n + b_1 A x^{n-1} + b_2 A x^{n-2} + \dots + b_{n-2} A x^2 + b_{n-1} A x$$
$$+ b_0 B x^{n-1} + b_1 B x^{n-2} + \dots + b_{n-3} B x^2 + b_{n-2} B x + b_{n-1} B$$
$$+ (n-1) b_0 A x^n + (n-2) b_1 A x^{n-1} + (n-3) b_2 A x^{n-2} + \dots + b_{n-2} A x^2$$

$$+9(n-1)b_0Bx^{n+1}+2(n-2)b_1Bx^{n-2}+\ldots 4b_{n-3}Bx^2+2b_{n-2}Bx$$

$$+(n-1)b_0Cx^{n-2}+\ldots+3b_{n-4}Cx^2+2b_{n-3}Cx+b_{n-2}C+k$$

Если функція лѣвой части тождественна съ функціей правой части, то коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ аргумента должны быть равны

$$a_0=nb_0A$$

$$a_1=(n-1)b_1A+(2n-1)b_0B$$

$$a_2=(n-2)b_2A+(2n-3)b_1B+(n-1)b_0C$$

$$a_3=(n-3)b_3A+(2n-5)b_2B+(n-2)b_1C$$

— — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — —

$$a_{n-2}=2b(n-2)A+5b_{n-3}B+3b_{n-4}C$$

$$a_{n-1}=b_{n-1}A+3b_{n-2}B+2b_{n-3}C$$

$$a_n=b_{n-1}B+b_{n-2}C+k$$

Мы получили систему $n+1$ ур-ній первой степени относительно неизвѣстныхъ $b_0, b_1, \ldots b_{n-1}, k$. Изъ этихъ ур-ній всегда можно опредѣлить значенія коэфф. ціентовъ, чѣмъ наша теорема доказана.

Примѣръ I. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

Для опредѣленія интеграла, представимъ подинтегральное выраженіе въ видѣ дроби, числитель которой раціональный, знаменатель ирраціональный:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

Тогда по формулѣ (53)

$$\int\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=(b_0x+b_1)\sqrt{a^2-x^2}+k\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Для определенія коэффиціентовъ b_0, b_1 и K дифференцируемъ обѣ части ур-нія

$$\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = -(b_0x+b_1)\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} + b_0\sqrt{a^2-x^2} + \frac{K}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

Освобождаемъ отъ знаменателей

$$a^2-x^2 = -b_0x^2 - b_1x + b_0a^2 - b_0x^2 + K$$

Коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ аргумента лѣвой и правой части равны между собою, поэтому

$$-1 = 2b_0 \qquad b_0 = -\tfrac{1}{2}$$
$$0 = -b_1 \qquad b_1 = 0$$
$$a^2 = b_0a^2 + K \qquad K = \frac{a^2}{2}$$

Подставляя эти значенія въ ур. (54) получимъ:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

Подставляемъ сюда еще значеніе послѣдняго интеграла по формулѣ (67):

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (55)$$

<u>Примѣръ II</u> $\int\sqrt{x^2+\alpha}\,dx$

Чтобы опредѣлить интегралъ по формулѣ (53) приведемъ выраженіе къ такому виду, чтобы въ числителѣ былъ раціональный многочленъ, а въ знаменателѣ ирраціональный:

$$\int\sqrt{x^2+\alpha}\,dx = \int\frac{x^2+\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha}}\,dx.$$

Пользуясь формулою (53) находимъ:

$$\int\frac{x^2+\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha}} = (b_0x+b_1)\sqrt{x^2+\alpha} + K\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}. \quad (56)$$

Остается опредѣлить коэффиціенты b_0, b_1, K. Съ этою цѣлью дифференцируемъ обѣ части.

$$\frac{x^2+\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha}} = b_0\sqrt{x^2+\alpha} + \frac{(b_0x+b_1)x}{\sqrt{x^2+\alpha}} + \frac{K}{\sqrt{x^2+\alpha}}$$

$$x^2+\alpha = b_0(x^2+\alpha)+(b_0x+b_1)x+K$$

$$x^2+\alpha = b_0x^2+b_0\alpha+b_0x^2+b_1x+K$$

Коэффиціенты одинаковыхъ степеней аргумента лѣвой и правой части должны быть равны между собою, откуда:

$$1=2b_0 \qquad b_0=\frac{1}{2}$$
$$0=b_1 \qquad b_1=0$$
$$\alpha=b_0\alpha+K \qquad K=\frac{\alpha}{2}$$

Подставляя эти значенія въ ур. (56)

$$\int\sqrt{x^2+\alpha}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+\alpha}+\frac{\alpha}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}$$

Послѣдній интегралъ опредѣленъ ур-іемъ (52). Подставляя сюда его значеніе, получимъ:

$$\int\sqrt{x^2+\alpha} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+\alpha}+\frac{\alpha}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+\alpha})+C \quad (57)$$

Докажемъ теперь, что опредѣленіе интеграла, вида

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$$

къ которому по форм. (58) сводится каждый интегралъ, имѣющій форму $\int\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$, всегда возможно.

Ходъ этого опредѣленія, въ зависимости отъ знака A, состоитъ въ слѣдующемъ. Положимъ сначала, что $A>0$. Тогда въ подкоренномъ выраженіи беремъ за скобки A:

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{A\left(x^2+2\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}\right)}}$$

$\sqrt{A}$ будетъ вещественный, и его можно

вынесемъ его какъ постоянного множителя за знакъ $\int$:
$$J = \frac{1}{\sqrt{A}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2\frac{B}{A}x + \frac{C}{A}}}$$
Теперь дополнимъ два первые члена подъ корнемъ до полнаго квадрата:
$$J = \frac{1}{\sqrt{A}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2\frac{B}{A}x + \frac{B^2}{A^2} + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{A^2}}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{B}{A})^2 + \frac{AC - B^2}{A^2}}}$$
Введемъ теперь новую переменную: $x + \frac{B}{A} = y$, откуда $dx = dy$; а второе слагаемое подъ корнемъ, которое можетъ быть больше или меньше нуля, назовемъ черезъ α.
Подставляя эти значенія въ предыдущее выраженіе получимъ:
$$J = \frac{1}{\sqrt{A}} \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + \alpha}}$$
Мы видимъ, что, если $A > 0$, то опредѣленіе интеграла нашего выраженія сводится къ опредѣленію извѣстнаго уже намъ вида интеграла (82)
Допустимъ теперь, что $A < 0$. Тогда $\sqrt{A}$ будетъ выраженіе мнимое. Чтобы получить результатъ въ дѣйствительныхъ видахъ, подставимъ: $A = -A_1$:
$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-A_1x^2 + 2Bx + C}}$$

Беремъ A_1 за скобки:
$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{A_1(\frac{C}{A_1} - x^2 + 2\frac{B}{A_1}x}}$$

Такъ, какъ $A_1 > 0$ то $\sqrt{A_1}$ величина вещественная, которую можно вынести

за знакъ $\int$: $J = \frac{1}{\sqrt{A}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{C}{A} - (x^2 - 2\frac{B}{A}x)}}$

Дополняемъ выраженіе въ скобкахъ до полнаго квадрата:

$$J = \frac{1}{\sqrt{A_1}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{C}{A_1} + \frac{B^2}{A_1^2} - (x^2 - 2\frac{B}{A}x + \frac{B^2}{A^2})}} = \frac{1}{\sqrt{A_1}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{A_1C + B^2}{A^2} - (x - \frac{B}{A_1})^2}}$$

Если первое слагаемое подъ корнемъ величина отрицательная, то подкоренное выраженіе мнимое, но такъ какъ мы занимаемся лишь вещественными величинами, то положимъ что

$\frac{A_1C + B^2}{A_1^2} = a^2$ величина положительная.

Введемъ новую перемѣнную: $x - \frac{B}{A_1} = y$, откуда $dx = dy$. По подстановкѣ этихъ значеній въ предыдущее равенство, получаемъ

$$J = \frac{1}{\sqrt{A_1}} \int \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}}.$$

т. е. въ такихъ случаяхъ, когда $A < 0$, опредѣленіе искомаго интеграла сводится къ опредѣленію извѣстнаго намъ интеграла (51)

<u>Примѣръ 1</u> $J = \int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 - 20x + 65}} =$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{5(x^2 - 4x + 13)}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 13}}$$

Чтобы дополнить первые два члена до полнаго квадрата, прибавляемъ и вычитаемъ 4:

$$J = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 4 + 9}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2 + 9}}.$$

Вводимъ новую перемѣнную $x-2=y, dx=dy$

$$J=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dy}{\sqrt{y^2+9}}$$

Тогда, по формулѣ (52):

$$J=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left(y+\sqrt{y^2+9}\right)+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left(x-2+\sqrt{x^2-4x+13}\right)+C$$

Примѣръ II. $\int\frac{dx}{\sqrt{20+16x-4x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{4(5-x^2+4x)}}$

Выносимъ $\sqrt{4}$ за знакъ интеграла и дополнимъ два послѣдніе члена въ скобкахъ до полнаго квадрата:

$$J=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{5-(x^2-4x)}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{9-(x^2-4x+4)}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}}$$

Вводимъ новую перемѣнную: $x-2=y, dx=dy$

$$J=\frac{1}{2}\int\frac{dy}{\sqrt{3^2-y^2}}$$

Тогда по формулѣ (51):

$$J=\frac{1}{2}\arcsin\frac{y}{3}+C=\frac{1}{2}\arcsin\frac{x-2}{3}+C$$

Пусть требуется вычислить интегралъ ирраціональной функціи, причемъ ирраціональность состоитъ въ томъ, что функція содержитъ нѣкоторый квадратный корень изъ многочлена второй степени; и пусть, кромѣ того, нельзя привести интегралъ къ виду лѣвой части ур. (53).

По только что изложенному, можно данный интегралъ преобразовать такимъ образомъ, что онъ принимаетъ одну изъ слѣдующихъ формъ:

$$\int f(x, \sqrt{x^2+a})\,dx$$

и $\int f(x, \sqrt{a^2+x^2})\,dx$

причемъ f обозначаетъ раціональную

функцію аргументовъ.
Интегрированіе такихъ функцій приводится къ интегрированію раціональныхъ выраженій, посредствомъ подстановки новыхъ перемѣнныхъ. Такъ, чтобы опредѣлить интегралъ перваго выраженія, подставляемъ:
$\sqrt{x^2+\alpha} = t - x$, откуда $x = \frac{t^2-\alpha}{2t}$, $\sqrt{x^2+\alpha}$, $\sqrt{x^2+\alpha} = \frac{t^2+\alpha}{2t}$,
$\frac{dx}{dt} = \frac{t^2+\alpha}{2t^2}$

Тогда $\int f(x, \sqrt{x^2+\alpha})dx = \int f\left(\frac{t^2-\alpha}{2t}, \frac{t^2+\alpha}{2t}\right)\frac{t^2+\alpha}{2t^2}dt =$
$= \int R(t)dt$, гдѣ $R(t)$ есть раціональная функція t.

Примѣромъ такой подстановки служитъ примѣръ II на стр. 369.

Остается разсмотрѣть 2-ой случай. Здѣсь вводимъ слѣдующую новую перемѣнную
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = t$, тогда $a+x=(a-x)t^2$, $x+xt^2=at^2-a$,
$x=\frac{at^2-a}{1+t^2}$

Подкоренное выраженіе можно преобразовать слѣдующимъ образомъ:
$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{(a+x)(a-x)} = \sqrt{\frac{(a+x)(a-x)^2}{a-x}} = (a-x)\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$

Подставляя сюда найденныя значенія находимъ:
$\sqrt{a^2-x^2} = (a-x)\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = \left(a-\frac{at^2-a}{1+t^2}\right)t = \frac{2at}{t^2+1}$.

Дифференцируемъ полученное для x выраженіе

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(1+t^2)2at-(at^2-a)2t}{(1+t^2)^2} = \frac{2at+2at^3-2at^3+2at}{(1+t^2)^2}$$
$$= \frac{4at}{(1+t^2)^2}$$

Подставляя найденныя значенія въ подинтегральное выраженіе, получаемъ:

$$\int f(x\sqrt{a^2-x^2})dx = \int f\left(\frac{at^2-a}{1+t^2}, \frac{2at}{1+t^2}\right)\frac{4at}{(1+t^2)^2}dt = \int R(t)dt$$

Примѣръ $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

Подставляемъ сюда значенія dx и $\sqrt{a^2-x^2}$ изъ предыдущаго примѣра:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int\frac{t^2+1}{2at}\cdot\frac{4at}{(1+t^2)^2}dt = \int\frac{2dt}{1+t^2} = 2\int\frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= 2\,arctg\,t + c = 2\,arctg\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = C$$

Подстановки $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = t$ и $\sqrt{x^2+\alpha} = t-x$ называется Euler'овыми подстановками.

Интегрированіе тригонометрическихъ функцій

Во многихъ случаяхъ можемъ помощію практическихъ пріемовъ интегрировать тригонометрическія функціи. Разсмотримъ теперь общій способъ приведенія интеграла тригонометрической функціи къ опредѣленію интеграла алгебраической. Положимъ, требуется опредѣлить интеграла

$$\int f(Sin\,x, Cos\,x)\,dx$$

гдѣ f обозначаетъ алгебраическую функцію аргументовъ. Вводимъ новую перемѣнную: $tg\frac{1}{2}x = u$

Тогда

$$Cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\frac{x}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$Sin\frac{x}{2} = tg\frac{x}{2}\cdot Cos\frac{x}{2} = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$$

Отсюда $Sin\,x = 2\,Sin\frac{x}{2}\cdot Cos\frac{x}{2} = \frac{2u}{1+u^2}$

$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

Наконецъ $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} u$; $x = 2\operatorname{arctg} u$; $\frac{dx}{du} = \frac{2}{1+u^2}$

Подставляя эти значенія въ искомый интегралъ, находимъ:

$\int f(\sin x, \cos x)\,dx = \int f\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2}{1+u^2}\,du = \int \varphi(u)\,du$

гдѣ φ обозначаетъ алгебраическую функцію.

<u>Примѣръ</u> $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$

Для отысканія интеграла, вставляемъ сюда предыдущія обозначенія:

$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \frac{(1+u^2)^2}{4u^2}\,\frac{2}{1+u^2}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{1+u^2}{u^2}\,du =$
$= -\frac{1}{2u} + \frac{u}{2} + C = -\frac{1}{2}\operatorname{Ctg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + C = \frac{-\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} +$
$+ \frac{\sin\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}} + C = \frac{-\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} + C = -\frac{\cos x}{\sin x} + C$
$= -\operatorname{Ctg} x + c.$

<u>Приложеніе интегральнаго исчисленія къ разложенію функцій въ ряды</u>

Пусть дана функція $F(x+a)$ и ея производная $\frac{dF(x+a)}{dx} = f(x+a)$ . . (58)

Положимъ, что намъ извѣстна разложеніе функціи $f(x+a)$ по ряду Тайлора:

$f(x+a) = f(a) + xf'(a) + \frac{x^2}{2}f''(a) + \ldots\ldots$ (59)

Изъ ур-нія (57) мы имѣемъ, что

$F(x+a) = \int f(x+a)\,dx.$

т. е. $F(x+a)$ мы получимъ, интегрируя лѣвую часть ур. (59). Спрашивается получимъ-ли мы то же самое если интегрируемъ правую часть ур. (59)

Мы не можемъ знать это напередъ, такъ какъ число членовъ ряда безконечно велико. Чтобы изслѣдовать данный вопросъ, разложимъ правую часть ур. (59) на сумму n членовъ и остаточный членъ:

$$f(x+a) = f(a) + x f'(a) + \frac{x^2}{2} f''(a) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R(x) \quad \dots (60)$$

Если рядъ сходящійся, то остаточный членъ по абсолютной величинѣ можетъ быть сдѣланъ меньше произвольно малой величины ε:

$$-\varepsilon < R(x) < \varepsilon \qquad (61)$$

Введемъ теперь обозначеніе:

$$\int R(x)\, dx = T(x)$$

Откуда $$R(x) = \frac{dT(x)}{dx}$$

Подставляя значеніе $R(x)$ въ неравенство (61), получимъ:

$$-\varepsilon < \frac{dT(x)}{dx} < \varepsilon$$

Изъ послѣдняго неравенства имѣемъ:

$$\frac{dT(x)}{dx} + \varepsilon > 0$$

$$\frac{dT(x)}{dx} - \varepsilon < 0$$

Или
$$\left.\begin{aligned} \frac{d(T(x)+\varepsilon x)}{dx} > 0 \\ \frac{d(T(x)-\varepsilon x)}{dx} < 0 \end{aligned}\right\} \dots (62)$$

Мы знаемъ, что, если первая производная функціи больше нуля, то функція возрастаетъ, если же эта производная меньше нуля, то функція убываетъ (стр. 272). Слѣдовательно функція $y = T(x) + \varepsilon x$ должна возрастать, а функція $y = T(x) - \varepsilon x$ убывать. Посмотримъ, всегда ли

это возможно. Пусть кривая LM изображаетъ функцію $y=f(x)$. Отложивъ на оси абсциссъ $OA=x$ и возставивъ перпендикуляръ изъ точки A, получимъ $AP=f(x)$. Чтобы получить соотвѣтственныя значенія функціи $y=f(x)+\varepsilon x$ и $y=f(x)-\varepsilon x$ откладываемъ вверхъ и внизъ отъ точки P отрѣзки $PP'=PP''=\varepsilon x$. Откладывая такимъ образомъ различныя значенія x на оси Ox, мы получимъ еще двѣ кривыя изображающія функціи $y=f(x)+\varepsilon x$ и $f(x)-\varepsilon x$.

фиг. 119.

Такъ какъ εx произвольно мало, то и обѣ эти кривыя произвольно мало отличаются отъ кривой $y=f(x)$. Слѣдовательно, онѣ будутъ возрастать или убывать въ зависимости отъ того, будетъ ли функція $f(x)$ возрастать или убывать, что противорѣчитъ неравенствамъ (62) т.е. функція $y=f(x)$ не можетъ имѣть произвольной формы. Условіе (62) возможно только въ томъ случаѣ если $y=f(x)$ изображаетъ кривую произвольно мало отличающуюся отъ прямой параллельной оси x въ

Въ этомъ случаѣ ур-ніе ея будетъ произвольно мало отличаться отъ $y=C_n$, гдѣ C_n постоянная величина

фиг. 120.

Итакъ, мы видимъ, что

$$\Gamma(x) = C_n + \eta,$$

гдѣ η величина произвольно малая. Интегрируя теперь ур-ніе (60) получаемъ

$$F(x+a)+c = xf(a)+c_0+\frac{x}{2}f'(a)+c_1+\frac{x^3}{3!}f''(a)+c_2+\ldots+$$
$$+\frac{x^n}{n!}f^{(n-1)}(a)+c_{n-1}+C_n+\eta \quad \ldots\ldots (63)$$

гдѣ $c, c_0, c_1, \ldots c_n$ величины произвольныя постоянныя. Обозначая

$$c_0+c_1+c_2\ldots+c_n-c = C,$$

можемъ представить ур-ніе (63) въ такомъ видѣ:

$$F(x+a) = C+xf(a)+\frac{x^2}{2}f'(a)+\frac{x^3}{3!}f''(a)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n-1)}(a)+\eta$$

Эта формула получается изъ формулы (60), если интегрировать послѣдниюю и соединить всѣ постоянныя интегрированія; причемъ произвольно-малая величина η происходитъ отъ интегрированія остальнаго члена. Значитъ остаточный членъ произвольно мало вліяетъ на результатъ интегрированія. Отсюда мы заключаемъ, что сходящійся рядъ Тайлора можно интегрировать почленно и вновь полученный рядъ тоже будетъ сходящійся.

Чтобы опредѣлить C, стоитъ только x придать частное значеніе 0; тогда получимъ

$$F(0) = C$$

Въ такомъ случаѣ разложеніе принимаетъ видъ

$$F(x+a) = F(a)+xf(a)+\frac{x^2}{2}f'(a)+\ldots$$

Соответственный рядъ Маклорена будетъ:

$$F(x) = F(0) + x f(0) + \frac{x^2}{2} f'(0) + \dots$$

Доказанною теоремой можно воспользоваться для разложенія циклометрическихъ функціи. Пусть напр. дана функція

$$F(x) = \operatorname{arctg} x.$$

Диффеpенцируя обѣ части находимъ:

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d \operatorname{arctg} x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

Разложеніе последней функціи извѣстно:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \quad (64)$$

По стр. 264 этотъ рядъ сходящійся, если $|x| < 1$ Интегрируя теперь обѣ части последняго равенства и замѣчая, что $\operatorname{arctg} 0 = 0$ получаемъ:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (65)$$

Условіе сходимости этого ряда будетъ тоже, что и для ряда (64) т. е. рядъ (65) будетъ сходящимся, если

$$|x| < 1$$

Можно доказать, что этотъ рядъ будетъ сходящимся и для $x = 1$. Тогда въ лѣвой части получимъ $\frac{\pi}{4}$:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Теперь разсмотримъ разложеніе функціи

$$F(x) = \arcsin x.$$

Производная этой функціи будетъ:

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Для разложенія этой последней функціи

Воспользуемся извѣстнымъ намъ разложенiемъ (стр. 288):

$$(1+y)^{\mu} = 1+\mu y+\frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot2}y^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot y^3+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}y^4$$

Мы знаемъ что этотъ рядъ сходится для значенiй

$$(y)<1$$

Замѣчая, что функцiю $\frac{1}{\sqrt{1+y}}$ можно представить въ видѣ $(1+y)^{-\frac{1}{2}}$, мы найдемъ разложенiе этой функцiи, если въ предыдущую формулу подставимъ частное значенiе $\mu=-\frac{1}{2}$:

$$(1+y)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}y+\frac{-\frac{1}{2}\cdot-\frac{3}{2}}{1\cdot2}y^2+\frac{-\frac{1}{2}\cdot-\frac{3}{2}\cdot-\frac{5}{2}}{1\cdot2\cdot3}y^3+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}{1\cdot2\cdot3\cdot4}y^4+\dots=1-\frac{1}{2}y+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}y^2-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}y^3+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}y^4$$

Если сюда подставимъ $y=-x^2$ то получимъ разложенiе функцiи (66)

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^4+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^6+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^8+\dots$$

Интегрируя обѣ части полученнаго ур-нiя и замѣчая, что $\arcsin 0=0$ находимъ искомое разложенiе:

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{x^7}{7}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{x^9}{9}\dots$$

Этотъ рядъ сходится для всѣхъ значенiй

$$x^2<1 \text{ или } (x)<1.$$

Разложенiемъ функцiй въ ряды можно воспользоваться и для приближеннаго интегрированiя функцiй.

Пусть напримѣръ требуется опредѣлить интегралъ:

$$\int \frac{e^x - 1}{x}\, dx.$$

Намъ извѣстно (стр. 278) разложеніе функціи e^x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Подставляя это разложеніе въ выраженіе (67), имѣемъ:

$$\int \frac{e^x - 1}{x}\, dx = \int \frac{x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots}{x}\, dx =$$
$$= \int \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \cdots\right) dx.$$

Этотъ рядъ сходящійся для всѣхъ положительныхъ значеній x

Если теперь интегрировать выраженіе въ скобкахъ, то получимъ:

$$\int \frac{e^x - 1}{x}\, dx = C + x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3!3^2} + \frac{x^4}{3!4^2} + \cdots$$

Опредѣленіе площадей плоскихъ фигуръ

Одно изъ самыхъ важныхъ приложеній интегральнаго исчисленія есть приложеніе его къ квадратурѣ площадей кривыхъ, т. е. изслѣдованіе площадей ограниченныхъ кривыми или прямыми линіями.

Мы раньше (стр. 332) видѣли, что опредѣленный интегралъ, вида

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

изображаетъ площадь, ограниченную кривой $y = f(x)$ осью x-овъ и двумя ординатами, соотвѣтствующими абсциссамъ a и b.

Разсмотримъ теперь вычисленіе по

щадей коническихъ сѣченій

<u>I Парабола</u> $y^2 = 2px$.

фиг. 121.

По общей формулѣ (68) площадь $ODB = \int_0^x \sqrt{2px}\,dx$.

Чтобы вычислить этотъ опредѣленный интегралъ найдемъ соотвѣтственный неопредѣленный:

$$\int\sqrt{2px}\,dx = \sqrt{2p}\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{2p}\,x^{\frac{3}{2}}$$

Переходя къ опредѣленному интегралу, имѣемъ:

$$\int_0^x\sqrt{2px}\,dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{2p}\,x^{\frac{3}{2}}\right]_0^x = \frac{2}{3}\sqrt{2p}\,x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x\sqrt{2px}$$

Вводя ординату y, соотвѣтствующую абсциссѣ x получаемъ:

$$ODB = \frac{2}{3}xy$$

<u>II Эллипсъ</u> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Опредѣлимъ сначала площадь $OABD$, для чего въ общую формулу подставляемъ

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

причемъ предѣлами служатъ 0 и x:

фиг. 122.

$$OABD = \int_0^x \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

Неопредѣленный интегралъ этого выраженія намъ извѣстенъ (стр. 372) отсюда подставляя его значенія, получимъ:

$$OABD = \frac{b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^x = \frac{b}{2a}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right).$$

Подставляя сюда a вмѣсто x, получимъ

площадь $\frac{1}{4}$ эллипса

$$OLBA = \frac{b}{2a}a^2 \arcsin 1 = \frac{ab\pi}{4}$$

отсюда вся площадь E эллипса будетъ

$$E = ab\pi.$$

III Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$

Если подставимъ въ общую формулу (61) значение y, и взять опред. интегралъ между пределами a и x, то получимъ площадь ABD.

фиг. 123

$$ABD = \int_a^x \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\,dx$$

по формуле (56) (стр. 372)

$$ADB = \frac{b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\right]_a^x =$$

$$= \frac{b}{2a}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\right) + \frac{b}{2a}a^2\ln a =$$

$$= \frac{bx}{2a}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{ab}{2}\ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}$$

Мы разсматривали только определение площадей частнаго вида, именно площадей, ограниченныхъ кривою линией, двумя ординатами и осью абсциссъ. Но не трудно убедиться, что къ этому случаю можно свести определение площадей всевозможныхъ формъ. Если напр. требуется определить площадь $ABCD$ (фиг. 124) то такую площадь можно представить въ виде

фиг. 124

$ABCD = ADD_1A_1 + DCC_1D_1 - BCC_1B_1 - ABB_1A_1$,

причемъ каждую изъ площадей правой стороны можно вычислить помощью извѣстнаго намъ пріема.

Если же требуется вычислить площадь, ограниченную замкнутою кривою $ADBC$, то стоитъ лишь провести касательныя къ этой кривой, параллельныя оси Y-въ, тогда

фиг. 125.

$$ADBC = ACBB_1A_1 - ADBB_1A_1$$

<u>Примѣръ.</u> Вычислить площадь, ограниченную кривой

$$x^2+(y-b)^2 = r^2 \quad \text{. . . . . . . (69)}$$

Мы знаемъ (стр 24), что ур-ніе (69) изображаетъ кругъ радіуса r, центръ котораго имѣетъ координаты $(0, b)$. Чтобы опредѣлить площадь этого круга по методамъ интегральнаго исчисленія, мы проводимъ касательныя, параллельныя Oy. Рѣшимъ ур-ніе (69) относительно y:

фиг. 126.

$$y = b \pm \sqrt{r^2-x^2}$$

то верхній знакъ передъ корнемъ соотвѣтствуетъ части ACB, а нижній части ADB круга. Такъ какъ еще $OB_1 = r$, $OA_1 = -r$, то

$$ACBB_1A_1 = \int_{-r}^{+r} (b+\sqrt{r^2-x^2})\,dx,$$

$$ADBB_1A_1 = \int_{-r}^{+r}(b-\sqrt{r^2-x^2})dx,$$

откуда площадь круга

$$F = ACBB_1A_1 - ADBB_1A_1 = \int_{-r}^{+r}(b+\sqrt{r^2-x^2})dx - \int_{-r}^{+r}(b-\sqrt{r^2-x^2})dx = \int_{-r}^{+r} b\,dx + \int_{-r}^{+r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx - \int_{-r}^{+r} b\,dx + \int_{-r}^{+r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx = 2\int_{-r}^{+r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx = \left[x\sqrt{r^2-x^2}+r^2\arcsin\frac{x}{r}\right]_{-r}^{+r} = r^2\arcsin 1 - r^2\arcsin(-1) = \frac{r^2\pi}{2} - \left(-\frac{r^2\pi}{2}\right) = r^2\pi.$$

Опредѣлимъ теперь площадь ограниченную какими-нибудь линіями, заданными ур-ніями въ полярныхъ координатахъ. Легко убѣдиться, что опредѣленіе всякой такой площади можетъ быть сведено къ опредѣленію площади, ограниченной кривою линіею и двумя радіусами векторами. Найдемъ по этому площадь OAB, ограниченную двумя радіусами векторами образующими съ полярною осью Ox углы φ_0 и φ_1 и дугой AB кривой

$$r = f(\varphi)$$

фиг. 127.

Проведемъ подъ угломъ φ къ полярной оси радіусъ векторъ $OP = r$, тогда площадь OAP зависитъ отъ величины угла φ, т.е. есть функція отъ φ

$$OAP = F(\varphi)$$

Придадимъ теперь углу φ прира-

щеніе $\Delta\varphi$, тогда $OP' = r + \Delta r$ и площадь OAP приметъ приращеніе

$$OPP' = \Delta F(\varphi).$$

Черезъ точки P и P' радіусами OP и OP' проведемъ круговыя дуги PR и $P'R'$; тогда въ случаѣ возрастающей отъ точки P функціи $r = f(\varphi)$

$$OPR < OPP' < OR'P'$$

$$\frac{1}{2} OP \cdot PR < \Delta F(\varphi) < \frac{1}{2} OP' \cdot P'R'.$$

Но $OP = r$, $PR = r\Delta\varphi$, $OP' = r + \Delta r$, $P'R' = (r + \Delta r)\Delta\varphi$, поэтому

$$\frac{r^2 \Delta\varphi}{2} < \Delta F(\varphi) < \frac{(r+\Delta r)^2 \Delta\varphi}{2}$$

$$\frac{r^2}{2} < \frac{\Delta F(\varphi)}{\Delta\varphi} < \frac{(r+\Delta r)^2}{2}$$

Для предѣла $\Delta\varphi = 0$, и $\Delta r = 0$, т. е. предѣлъ правой части сдѣлается равнымъ лѣвой, поэтому и величина средняго члена стремится къ этому значенію, и мы получимъ

$$\frac{dF(\varphi)}{d\varphi} = \frac{r^2}{2}$$

откуда

$$F(\varphi) = \int \frac{r^2}{2} d\varphi + C$$

Для опредѣленія постоянной величины C придадимъ φ частное значеніе φ_0; тогда OP совпадетъ съ OA и $F(\varphi)$ обратится въ 0:

$$0 = \left[\int \frac{r^2}{2} d\varphi\right]_{\varphi=\varphi_0} + C$$

Вычитая это ур-ніе изъ предыдущаго

$$F(\varphi) = \int \frac{r^2}{2} d\varphi - \left[\int \frac{r^2}{2} d\varphi\right]_{\varphi=\varphi_0}$$

Для опредѣленія площади OAB вмѣсто φ слѣдуетъ еще подставить φ_1

$$OAB = \left[\int \frac{r^2}{2} d\varphi\right]_{\varphi=\varphi_1} - \left[\int \frac{r^2}{2} d\varphi\right]_{\varphi=\varphi_0}$$

$$OAB = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{r^2}{2} d\varphi \quad . \ . \ . \ (70)$$

Эта формула доказана нами для того случая, что r есть возрастающая функція отъ φ. Но выводами, подобными выводамъ при рѣшеніи соотвѣтственной задачи въ прямоугольныхъ координатахъ (стр. 333 и 334) легко убѣдиться, что она справедлива для всякой функціи $r=f(\varphi)$ непрерывной въ промежуткѣ отъ φ_0 до φ_1.

Примѣръ. Опредѣлить площадь OCAO, ограниченную радіусомъ векторомъ OA и дугой спирали Архимеда.

$$r = a\varphi.$$

фиг. 128.

Нижнимъ предѣломъ въ интегралѣ (70) будетъ значеніе φ, принадлежащее точкѣ O, т.е. $\varphi=0$, верхнимъ же предѣломъ φ. Подставляя еще $r=a\varphi$, мы получимъ:

$$OCAO = \int_0^{\varphi} \frac{a^2\varphi^2}{2} d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{\varphi} \varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\left[\frac{\varphi^3}{3}\right]_0^{\varphi} = \frac{a^2\varphi^3}{6}$$

Выпрямленіе плоскихъ кривыхъ

Выпрямленіемъ плоской кривой AB.

называется выпрямленіе длины дуги AB

фиг. 129.

Пусть уравненіе кривой AB:

$$y = f(x)$$

и $Oa_1 = a$, $Ob_1 = b$.

Придадимъ $Oa = x$ приращеніе Δx соединимъ точки PP' прямою линіею тогда

$$PP' = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$\frac{PP'}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

Съ уменьшеніемъ Δx прямая PP' приближается къ дугѣ PP' переходитъ къ дифференціалу дуги ds кривой AB. Послѣдняя формула тогда принимаетъ видъ:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad \ldots (71)$$

Дуга s очевидно есть нѣкоторая функція $\varphi(x)$ отъ x, потому

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

и отсюда дуга $AB = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \quad \ldots (72)$

Примѣръ. Вычислимъ дугу OA параболы $y^2 = 2px$.

фиг. 130

$y = \sqrt{2px}$, $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{p}{2x}}$.

Подставивъ это значеніе въ формулу (72), при

чемъ предѣлами интеграла будутъ 0 и a:

$$OA = \int_0^a \sqrt{1+\frac{p}{2x}}\,dx \quad . \; . \; . \; . \; (73)$$

Вычислимъ сначала соотвѣтственный неопредѣленный интегралъ введеніемъ новой перемѣнной

$$2x = u^2, \quad \frac{dx}{du} = u.$$

$$\int\sqrt{1+\frac{p}{2x}}\,dx = \int\sqrt{1+\frac{p}{u^2}}\,u\,du = \int\sqrt{u^2+p}\,du = \text{(форм. (59) на стр. 472)}$$

$$= \frac{u}{2}\sqrt{u^2+p} + \frac{p}{2}\ln\left(u+\sqrt{u^2+p}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2x}{2}}\sqrt{2x+p}+\frac{p}{2}\ln\left(\sqrt{2x}+\sqrt{2x+p}\right) =$$

$$= \sqrt{x^2+\frac{px}{2}}+\frac{p}{2}\ln\left(\sqrt{2x}+\sqrt{2x+p}\right)$$

Подставимъ эту величину въ формулу (73)

$$OA = \left[\sqrt{x^2+\frac{px}{2}}+\frac{p}{2}\ln\left(\sqrt{2x}+\sqrt{2x+p}\right)\right]_0^a =$$

$$= \sqrt{a^2+\frac{pa}{2}}+\frac{p}{2}\ln\left(\sqrt{2a}+\sqrt{2a+p}\right)-\frac{p}{2}\ln\sqrt{p} =$$

$$= \sqrt{a^2+\frac{pa}{2}}+\frac{p}{2}\ln\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{2a+p}}{\sqrt{p}} =$$

$$= \sqrt{a^2+\frac{pa}{2}}+\frac{p}{2}\ln\frac{\sqrt{2pa}+\sqrt{2pa+p^2}}{p}$$

Точка $A(a, b)$ лежитъ на параболѣ, слѣдовательно координаты ея удовлетворяютъ уравненію параболы $y^2 = 2px$:

$$b^2 = 2pa.$$

Поставивъ поэтому въ предыдущее уравненіе b^2 вмѣсто $2pa$, получимъ окончательную формулу

$$OA = \sqrt{a^2+\frac{b^2}{4}}+\frac{p}{2}\ln\frac{b+\sqrt{b^2+p^2}}{p}$$

Чтобы опредѣлить дугу кривой, отнесенной къ системѣ полярныхъ координатъ

$$r = f(\varphi) \qquad (74)$$

мы пользуемся формулами (стр. 27)

$$x = r\cos\varphi \quad . \ . \ . \ . \quad (75)$$
$$y = r\sin\varphi$$

Эти двѣ формулы вмѣстѣ съ предыдущей (74) опредѣляютъ x и y, какъ нѣкоторыя функціи отъ φ. Поэтому и φ можно разсматривать какъ функцію x или y, опредѣляемую этими ур-ніями. Очевидно и дуга s кривой будетъ функціей φ. Поэтому къ формулѣ (71) можно примѣнить формулу дифференцированія функціи отъ функціи (стр. 228)

$$\frac{ds}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dx}\right)^2}$$

$$\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} \quad . \ . \ . \ (76)$$

$\frac{dx}{d\varphi}$ и $\frac{dy}{d\varphi}$ опредѣляемъ изъ ур. (75)

$$\frac{dx}{d\varphi} = -r\sin\varphi + \cos\varphi\,\frac{dr}{d\varphi}$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = r\cos\varphi + \sin\varphi\,\frac{dr}{d\varphi}$$

Откуда

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = r^2\sin^2\varphi - 2r\sin\varphi\cos\varphi\,\frac{dr}{d\varphi} + \cos^2\varphi\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 +$$

$$+ r^2\cos^2\varphi + 2r\sin\varphi\cos\varphi\,\frac{dr}{d\varphi} + \sin^2\varphi\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 =$$

$$= r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2.$$

Это выраженіе подставивши въ ур. (76)

$$\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}$$

$$s = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi$$

<u>Примѣръ</u>. Опредѣлить дугу OC въ спирали Архимеда $r = a\varphi$ (см. фиг. 128).

$$r = a\varphi,\quad \frac{dr}{d\varphi} = a$$

Потому $\int_0^{\varphi} \sqrt{a^2\varphi^2+a^2}\, d\varphi = a\int_0^{\varphi}\sqrt{\varphi^2+1}\, d\varphi =$

$$= a\left[\frac{\varphi}{2}\sqrt{\varphi^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left(\varphi+\sqrt{\varphi^2+1}\right)\right]_0^{\varphi} =$$

$$= \frac{a}{2}\left(\varphi\sqrt{\varphi^2+1}+\ln\left(\varphi+\sqrt{\varphi^2+1}\right)\right)$$

Опредѣленіе центра тяжести

<u>Задача 1.</u> Опредѣлить центръ тяжести системы точекъ, лежащихъ въ одной плоскости.

Положимъ сначала, что двѣ точки $P_1(x_1 y_1)$ и $P_2(x_2 y_2)$ и что въ точкѣ P_1 сосредоточена масса, вѣса q_1, въ точкѣ P_2 масса вѣса q_2. По извѣстному закону физики центръ тяжести P этихъ двухъ точекъ лежитъ на прямой, соединяющей ихъ, такъ, что

y, $P_2(x_2 y_2)$, $P(x, y)$, $\Pi(\xi\eta)$, $P_1(x_1 y_1)$, $P_3(x_3 y_3)$, 0, x

фиг. 131.

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{q_2}{q_1}$$

Если отношеніе $\frac{P_1P}{PP_2}$ обозначить черезъ λ, то по теоріи аналитической

геометріи (стр. 60) координаты $(x\ y)$ точки P опредѣляются изъ ур-ній

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$$

Подставивъ сюда $\lambda = \frac{g_2}{g_1}$, получимъ координаты центра тяжести точекъ P_1 и P_2:

$$x = \frac{x_1 + \frac{g_2}{g_1} x_2}{1 + \frac{g_2}{g_1}}, \quad y = \frac{y_1 + \frac{g_2}{g_1} y_2}{1 + \frac{g_2}{g_1}},$$

или умножая числителей и знаменателей на g_1:

$$x = \frac{g_1 x_1 + g_2 x_2}{g_1 + g_2}, \quad y = \frac{g_1 y_1 + g_2 y_2}{g_1 + g_2}. \qquad (77)$$

Если еще дана третья точка $P_3(x_3\ y_3)$ вѣса g_3, то центромъ тяжести всѣхъ трехъ точекъ получится, если сначала опредѣлить центръ тяжести P точекъ P_1 и P_2 и потомъ центръ тяжести P и P_3. Такъ какъ въ точкѣ P сосредоточены вѣса точекъ P_1 и P_2, то точка P имѣетъ вѣсъ g_1+g_2. Потому

$$\frac{P\Pi}{\Pi P_3} = \frac{g_3}{g_1+g_2}$$

Подставляя это выраженіе вмѣсто λ и замѣняя x и y ихъ значеніями изъ ур-ній (77) въ формулахъ

$$\xi = \frac{x + \lambda x_3}{1+\lambda}, \quad \eta = \frac{y + \lambda y_3}{1+\lambda},$$

мы получаемъ координаты ξ и η центра тяжести точекъ $P_1\ P_2\ P_3$ въ видѣ:

$$\xi = \frac{\frac{g_1 x_1 + g_2 x_2}{g_1 + g_2} + \frac{g_3}{g_1+g_2} x_3}{1 + \frac{g_3}{g_1+g_2}}, \quad \eta = \frac{\frac{g_1 y_1 + g_2 y_2}{g_1 + g_2} + \frac{g_3}{g_1+g_2} y_3}{1 + \frac{g_3}{g_1+g_2}}$$

или $\xi = \frac{g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3}{g_1 + g_2 + g_3}$, $\eta = \frac{g_1 y_1 + g_2 y_2 + g_3 y_3}{g_1 + g_2 + g_3}$

Изъ этого мы уже видимъ, что центръ тяжести n точекъ $P_1, P_2, \dots P_n$ весовъ $g_1, g_2, \dots g_n$ имеетъ координаты

$$\xi = \frac{g_1 x_1 + g_2 x_2 + \dots + g_n x_n}{g_1 + g_2 + \dots + g_n} = \frac{\sum_{\nu=1}^{\nu=n} g_\nu x_\nu}{\sum_{\nu=1}^{\nu=n} g_\nu},$$

$$\eta = \frac{g_1 y_1 + g_2 y_2 + \dots + g_n y_n}{g_1 + g_2 + \dots + g_n} = \frac{\sum_{\nu=1}^{\nu=n} g_\nu y_\nu}{\sum_{\nu=1}^{\nu=n} g_\nu}$$

<u>Задача 2.</u> Определить центръ тяжести отрезка AB плоской кривой $y = f(x)$

фиг. 132

Мы разделяемъ отрезокъ CD на n равныхъ частей величины Δx и въ полученныхъ такимъ образомъ точкахъ возставляемъ перпендикуляры до пересеченія съ кривою AB. Эти точки мы соединяемъ прямыми линіями и такимъ образомъ заменяемъ данную кривую AB ломанною линіею. Для каждого прямолинейнаго отрезка этой ломаной линіи центръ тяжести $P_\nu(x_\nu, y_\nu)$ будетъ находиться въ середине его и

вѣсъ его g_ν будетъ пропорціональнымъ длинѣ Δs_ν этого отрѣзка, т. е. равенъ $m \Delta s_\nu$. Подставивши это выраженіе въ формулы (78), тогда получимъ координаты центра тяжести ломаной линіи

$$\xi = \frac{\sum_{\nu=1}^{\nu=n} x_\nu m \Delta s_\nu}{\sum_{\nu=1}^{\nu=n} m \Delta s_\nu} = \frac{m\sum_{\nu=1}^{\nu=n} x_\nu \Delta s_\nu}{m\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \Delta s_\nu} = \frac{\sum_{\nu=1}^{\nu=n} x_\nu \Delta s_\nu}{\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \Delta s_\nu},$$

$$\eta = \frac{\sum_{\nu=1}^{\nu=n} y_\nu m \Delta s_\nu}{\sum_{\nu=1}^{\nu=n} m \Delta s_\nu} = \frac{\sum_{\nu=1}^{\nu=n} y_\nu \Delta s_\nu}{\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \Delta s_\nu}$$

Если теперь перейти къ предѣлу, считая, что n дѣлается безконечно большимъ, ломаная линія переходитъ въ кривую AB, Δs_ν переходитъ въ дифференціалъ дуги ds, который по стр. 392 равенъ $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$, а знакъ Σ обращается въ знакъ опредѣлительнаго интеграла, такъ что центръ тяжести отрѣзка AB кривой линіи $y=f(x)$ имѣетъ координаты

$$\xi = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx}{\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx}; \quad \eta = \frac{\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx}{\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx} \qquad (79)$$

<u>Задача 3</u> Опредѣлить центръ тяжести плоской фигуры.

Разсмотримъ сначала тотъ частный случай, когда плоская фигура ограничена кривою $y=f(x)$, двумя ординатами и осью X. (черт. 133)

Мы опять раздѣляемъ

отрѣзокъ CD на n равныхъ частей величины Δx, возставляемъ въ полученный такимъ образомъ точкахъ перпендикуляры до пересѣченія съ кривой и черезъ эти точки пересѣченій проведемъ параллели къ оси $x^{ов}$ до пересѣченія со слѣдующимъ перпендикуляромъ. Такимъ образомъ получается система прямоугольниковъ, совершенность которыхъ при достаточно маломъ Δx произвольно мало отличается отъ фигуры CDBA.
Центръ тяжести каждаго такого прямоугольника, напр.: $CC'P'P$ лежитъ въ серединѣ его, т. е. имѣетъ координаты
$$x+\frac{\Delta x}{2} \text{ и } \frac{y}{2}$$
а масса, сосредоточенная въ центрѣ тяжести имѣетъ вѣсъ всего прямоугольника, который пропорціоналенъ площади $y\Delta x$ его, т. е. равенъ $m\,y\,\Delta x$.
Если эти значенія вмѣсто x_i, y_i и q_i подставить въ формулы (78) и перейти къ предѣлу $\Delta x = 0$, мы получимъ по сокращеніи на m искомыя координаты центра тяжести фигуры CDBA:
$$\xi = \frac{\int_a^b xy\,dx}{\int_a^b y\,dx},\quad \eta = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx}{\int_a^b y\,dx} \dots (80)$$
Если данная плоская фигура не имѣетъ вида CDBA, то указанными на стр. 387–388 образомъ можно ее разложить

на единицу и разность фигуръ такихъ формъ, для всякой фигуры найти центръ тяжести и всѣхъ, и, наконецъ опредѣлить для всѣхъ этихъ точекъ центръ тяжести посредствомъ первой задачи этой главы.

Примѣръ. Опредѣлить центръ тяжести для части OAB параболы $y^2 = 2px$

рис. 134.

По формуламъ (80) надо опредѣлить

$$\int_0^a y\,dx = \frac{2}{3}ab \text{ (стр. 386)}$$

$$\int_0^a xy\,dx = \int_0^a x\sqrt{2px}\,dx = \sqrt{2p}\int_0^a x^{3/2}\,dx = \sqrt{2p}\left[\frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^a = \frac{2}{5}\sqrt{2p}\,a^{5/2} = \frac{2}{5}a^2\sqrt{2pa} = \frac{2}{5}a^2 b$$

$$\frac{1}{2}\int_0^a y^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^a 2px\,dx = p\int_0^a x\,dx = p\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{pa^2}{2} = \frac{ab^2}{4}$$

Подставивъ эти значенія въ формулы (80)

$$\xi = \frac{\int_0^a xy\,dx}{\int_0^a y\,dx} = \frac{3}{5}a, \quad \eta = \frac{\frac{1}{2}\int_0^a y^2\,dx}{\int_0^a y\,dx} = \frac{3}{8}b$$

Приближенное вычисленіе опредѣленныхъ интеграловъ и площадей плоскихъ фигуръ.

Эти двѣ задачи въ сущности не различаются другъ отъ друга, потому что, какъ мы видѣли, опредѣленіе площади плоской фигуры сводится къ вычисленію нѣкотораго опредѣл-

леннаго интеграла и наоборотъ, величину опредѣленнаго интеграла можно представить въ видѣ площади плоской фигуры.

Мы уже познакомились съ однимъ изъ способовъ приближеннаго интегрированія, именно со способомъ разложенія подынтегр. функціи въ безкон. рядъ (стр. 384). Другой, болѣе грубый способъ опредѣленія площади, ограниченной произвольными линіями состоитъ въ томъ, что начертивъ границы фигуры на возможно лучшей, именно, однородной бумагѣ, вырѣзываютъ фигуру и взвѣшиваютъ ее. Тогда стоитъ только взвѣсить еще кусокъ опредѣленныхъ размѣровъ той же бумаги, чтобы сейчасъ найти искомую площадь.

Третій способъ наз. <u>способомъ трапецій.</u> Пусть требуется опредѣлить площадь $ABDC$. Мы раздѣляемъ отрѣзокъ CD на n равныхъ частей величины h и въ полученныхъ такимъ образомъ точкахъ $c_1, c_2, c_3, \dots c_{n-1}$ возставляемъ перпендикуляры до пересѣченія съ кривою AB. Эти точки пересѣченія $A, a_1, a_2, \dots B$ соединяемъ прямыми линіями; тогда сумма трапецій $Aa_1c_1C + a_1a_2c_2c_1 + a_2a_3c_3c_2 + \dots + a_{n-1}BDc_{n-1}$ при маломъ h даетъ приближенную величину площади $ABDC$. Площади этихъ трапецій равны:

Фиг. 135.

$$Aa_1c_1C = h\cdot\frac{y_0+y_1}{2}$$
$$a_1a_2c_2c_1 = h\cdot\frac{y_1+y_2}{2}$$
$$a_2a_3c_3c_2 = h\cdot\frac{y_2+y_3}{2}$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{n-1}BDc_{n-1} = h\cdot\frac{y_{n-1}+y_n}{2}$$

$$F = h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right) \quad \text{- - - - (31).}$$

Этотъ способъ очевидно примѣнимъ не только для опредѣленія площади начерченной фигуры, но и для вычисленія опредѣленныхъ интеграловъ.

<u>Примѣръ</u> Опредѣлить приближенную величину $\ln 3$.

$$\ln 3 = \ln(1+2) - \ln(1+0) = \left[\ln(1+x)\right]_0^2 = \int_0^2 \frac{dx}{1+x}.$$

Въ этомъ случаѣ значенія ординатъ $y_0, y_1 \dots$ опредѣляются изъ ур-ія $y = \frac{1}{1+x}$. Беремъ $h=1$, тогда $y_0 = \left(\frac{1}{1+x}\right)_{x=0} = 1$, $y_1 = \left(\frac{1}{1+x}\right)_{x=1} = \frac{1}{2}$; $y_2 = \left(\frac{1}{1+x}\right)_{x=2} = \frac{1}{3}$ и по форм. (31) $\ln 3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{7}{6} = 1{,}1666\dots$

Большее приближеніе мы уже получаемъ при $h = \frac{1}{2}$, тогда

$$y_0 = 1, \quad y_1 = 2/3, \quad y_2 = 1/2, \quad y_3 = 2/5, \quad y_4 = 1/3.$$

$$F = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{1}{6}\right) = \frac{67}{60} = 1{,}11666\dots$$

Истинная величина $\ln 3$ равна 1,0986. Болѣе точные результаты, чѣмъ способъ трапецій даетъ <u>формула Симпсона.</u> Мы и здѣсь раздѣляемъ нашу площадь $ABDC$ на узкія полосы ширины h, причемъ число этихъ площадей теперь должно быть четнымъ: $n = 2m$. Но вмѣсто того, чтобы соединить точки $A, a_1, a_2 \dots$ прямыми мы ⟹

ніями, ихъ соединяютъ кривыми. Черезъ каждыя три послѣдующія другъ за другомъ точки прокладываютъ дугу параболы, главная ось которой параллельна оси y-овъ. Тогда приближенную площадь F фигуры $ABDC$ получимъ, если сложимъ площади всѣхъ этихъ фигуръ, ограниченныхъ дугой параболы, двумя ординатами и осью X-овъ.

Опредѣлимъ сначала площадь $w_0 = A a_1 a_2 c_2 C_1$, гдѣ $A a_1 a_2$ замѣнено дугой параболы. Перенесемъ для этого начало координатъ въ точку c_1. Въ системѣ $a_1 c_1 x$ ур-іе параболы будетъ (стр. 70 и слѣд.) $y = ax^2 + bx + c$ ---- (82), слѣдовательно,

$$w_0 = \int_{-h}^{+h} y\,dx = \int_{-h}^{+h}(ax^2+bx+c)\,dx = \left[\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx\right]_{-h}^{+h} =$$

$$= \frac{ah^3}{3}+\frac{bh^2}{2}+ch+\frac{ah^3}{3}-\frac{bh^2}{2}+ch = \frac{2}{3}h(ah^2+3c) \text{ ---- } (83).$$

Т. к. точки $A(-h, y_0)$, $a_1(0, y_1)$, $a_2(h, y_2)$ лежатъ на параболѣ, то ихъ ординаты ихъ удовлетворяютъ уравненію (82):

$$y_0 = ah^2 - bh + c;\quad y_1 = c;\quad y_2 = ah^2 + bh + c.$$

Умножимъ второе ур-іе на 4 и сложимъ его съ первымъ и третьимъ; получаемъ:

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2ah^2 + 6c.$$

Подставимъ теперь вытекающее отсюда значеніе

$$ah^2 + 3c = \frac{y_0+4y_1+y_2}{2}$$ въ ур-іе (83), тогда

$$w_0 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Такимъ же образомъ найдемъ: $w_1 = \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$ и т. д.

Если сложить всѣ эти ур-ія, то получаемъ искомую площадь.

$$F = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 4y_{2m-1} + y_{2m}) \text{ -- } (84).$$

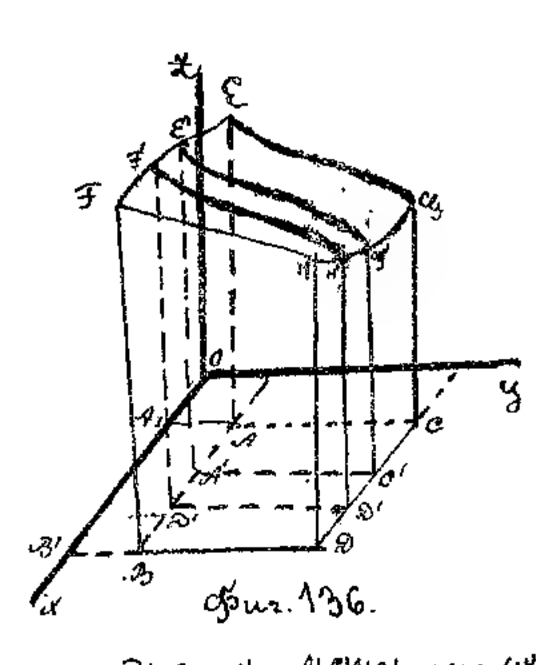
Примѣръ. Опредѣлить $\ln 3$.

По стр. 401: $\ln 3 = \int_0^2 \frac{dx}{1+x}$ и при $h=1$, $y_0 = 1$, $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{1}{3}$, тогда по форм. Симпсона: $F = \frac{1}{3}(1 + 4\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = \frac{10}{9} = 1{,}1111\ldots$

Если же примемъ $h = \frac{1}{2}$, то $y_0 = 1$, $y_1 = \frac{2}{3}$, $y_2 = \frac{1}{2}$, $y_3 = \frac{2}{5}$, $y_4 = \frac{1}{3}$, и $F = \frac{1}{6}(1 + 4\cdot\frac{2}{3} + 2\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{3}) = \frac{99}{90} = 1{,}10000\ldots$

Нахожденіе объемовъ.

Задача. Опредѣлить объемъ тѣла, ограниченнаго поверхностью $z = f(x, y)$, плоскостью (XY) и четырьмя плоскостями, изъ которыхъ двѣ параллельны плоскости (YZ) и двѣ — плоскости (ZX), т. е. (ф. 136) опредѣлить объемъ тѣла $ABDCGHFE$.



Фиг. 136.

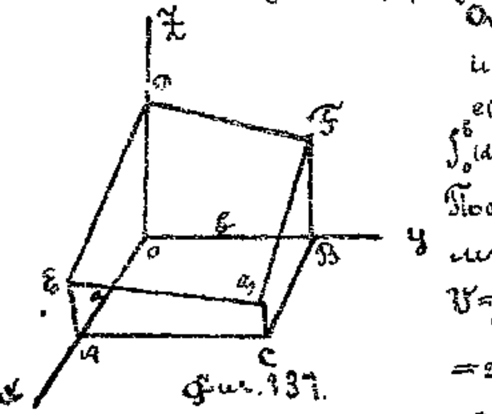
Пусть $OA_1 = a$, $OB_1 = a'$, $A_1A = b$, $A_1C = b'$. Для рѣшенія этой задачи мы раздѣляемъ отрѣзокъ A_1B_1 на n ровныхъ частей величины Δx и черезъ полученныя такимъ образомъ точки проводимъ плоскости, параллельныя плоскости (yz); отъ этого наше тѣло раздѣляется на n частей. Каждая такая часть $A'B'D'C'G'H'F'E'$ при достаточно маломъ Δx произвольно мало отличается отъ цилиндра съ основаніемъ $A'C'G'E'$ и высотою $A'B' = \Delta x$. Если обозначить площадь фигуры $A'C'G'E'$ черезъ w, то, слѣдоват., при достаточно маломъ Δx, объемъ такой части произвольно мало отличается отъ $w \cdot \Delta x$, и, при безконечномъ увеличеніи числа частей, на которыя раздѣляется отрѣзокъ AB, т. е. когда Δx переходитъ въ dx, равняется $w \cdot dx$. Объемъ v всего тѣла будетъ равняться суммѣ объемовъ всѣхъ этихъ частей, т. е. $= \Sigma w \cdot dx$, но, по стр. 338, сумма безконечнаго числа безконечно-малыхъ слагаемыхъ формы $w\,dx$, причемъ w есть нѣкоторая функція отъ x, есть опредѣленный интегралъ этой функціи, т. е. $v = \int_a^{a'} w\,dx$, ---(85) т. к. предѣлами для x служатъ по предположенію a и a'.

Остается еще опредѣлить w и подставить въ ур-іе (85). w есть величина площади $A'C'G'E'$, которая зависитъ отъ разстоянія этой плоскости $A'C'G'E'$ отъ плоскости (yz), т. е. которая есть нѣкоторая функція отъ x. Кривая $G'E'$ получается какъ сѣченіе поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью параллельною плоскости (yz), т. е. ур-іе этой кривой мы получаемъ изъ ур-ія $z = f(x, y)$, придавая x нѣкоторое соотвѣтственное постоянное значеніе. Координата y для точекъ E' и G' равняется b и b', поэтому по стр. 385 площадь плоской фигуры $A'C'G'E'$: $w = \int_b^{b'} f(x, y)\,dy$, гдѣ x имѣетъ соотвѣтственное постоянное значеніе. Если опредѣлить этотъ интегралъ, предполагая x постояннымъ, мы въ самомъ дѣлѣ получаемъ w какъ нѣкоторую функцію отъ x. Подставляя эту функцію въ форм. (85), мы получаемъ искомый объемъ v въ видѣ такъ

называемое двойного интеграла. $V=\int_a^{a'}\left(\int_b^{b'} f(xy)dy\right)dx$ ---(86).
причемъ по нашимъ выводамъ это обозначение выражаетъ, что следуетъ определить внутренний интегралъ, предполагая x постояннымъ, и потомъ вычислить внешний. Вместо ф-лы (86) пишется тоже: $V=\int_a^{a'}dx\int_b^{b'}f(x,y)dy$.
Можно было бы вычислить объемъ нашего тела, проводя секущия плоскости параллельно плоскости (ZX); тогда мы получили бы формулу:

$$V=\int_b^{b'}dy\int_a^{a'}f(xy)dx$$

<u>Примеръ.</u> Определить объемъ усеченной призмы, ограниченной плоскостью $z=\alpha x+\beta y+\gamma$, координатными плоскостями и плоскостями $x=a$, $y=b$. По формуле (86): $V=\int_0^a dx\int_0^b(\alpha x+\beta y+\gamma)dy$.



Фиг. 137.

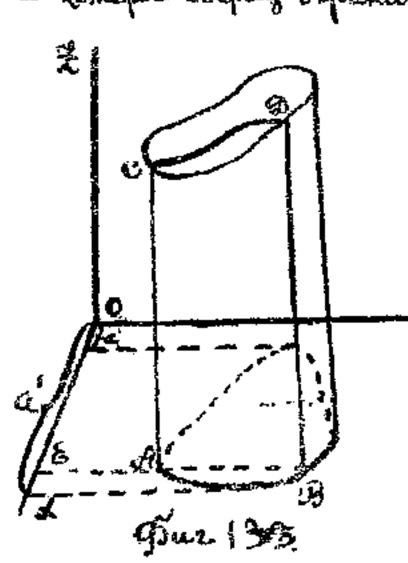
Определимъ сначала внутренний интегралъ, причемъ x предполагается постояннымъ.

$\int_0^b(\alpha x+\beta y+\gamma)dy=\left[\alpha xy+\beta\frac{y^2}{2}+\gamma y\right]_0^b=\alpha xb+\frac{\beta b^2}{2}+\gamma b.$

Подставимъ это выражение въ формулу для V:

$V=\int_0^a\left(\alpha xb+\frac{\beta b^2}{2}+\gamma b\right)dx=\left[\frac{\alpha x^2 b}{2}+\frac{\beta x b^2}{2}+\gamma xb\right]_0^a=$
$=\frac{\alpha a^2 b}{2}+\frac{\beta a b^2}{2}+\gamma ab=ab\left(\frac{\alpha a+\beta b}{2}+\gamma\right).$

Соответственными разсуждениями, какъ при определении площадей плоскихъ фигуръ (стр. 390) можно убедиться, что определение объема всякаго тела можетъ быть сведено къ определению объема цилиндрическаго тела съ даннымъ основаниемъ на плоскости (xy), образующия котораго параллельны оси Z-овъ и которое сверху ограничивается поверхностью $z=f(x,y)$.



Фиг. 138.

Принципъ определения объема такого тела тотъ же самый, что въ первой задаче этой главы. Мы разделяемъ безконечнымъ числомъ плоскостей, находящихся на безконечно-маломъ разстоянии другъ отъ друга и параллельныхъ плоскости (yz) наше тело на безконечное число частей, которыя безконечно-мало отличаются отъ цилиндрическихъ телъ. Если площадь сечения обозначить черезъ ω, то объемъ соответственнаго цилиндрич. тела будетъ ωdx и объемъ всего тела равняется

суммѣ объемовъ всѣхъ этихъ цилиндровъ, т.е. по стр. 338 равняется опредѣленному интегралу $\int \omega dx$, причемъ предѣлами этого интеграла служатъ крайнія значенія x. Пусть эти крайнія значенія будутъ $x=a$ и $x=a'$, тогда

$$V=\int_a^{a'} \omega\, dx \text{ ---------- } (87).$$

Ур-іе кривой CD мы получаемъ, придавая x въ ур-іи $z=f(x,y)$ нѣкоторое частное значеніе. Поэтому площадь ω каждаго сѣченія нашего тѣла плоскостью, параллельною плоскости (yz), по стр. 385 равна $\int f(x,y)dy$, гдѣ x полагается постояннымъ. Предѣлами же этого интеграла служатъ тѣ значенія y, которыя принадлежатъ къ точкамъ C и D, т.е. значенія $y=EA$ и $y=ED$. Эти предѣлы мѣняются для различныхъ плоскостей въ зависимости отъ x, т.е. суть функціи отъ x. Если обозначить эти функціи, т.е. значенія y, соотвѣтствующія точкамъ, въ которыхъ прямая, параллельная оси y-овъ, входитъ въ основаніе цилиндра и потомъ опять выходитъ изъ него, черезъ $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, то

$$\omega=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy,$$

причемъ при интегрированіи x считается постояннымъ. Подставляя это выраженіе въ формулу (87), мы получаемъ искомое выраженіе для объема: $V=\int_a^{a'} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy$ --- (88).

Конечно, и въ этомъ общемъ случаѣ можно было бы, измѣнивъ предѣлы, произвести сначала интегрированіе по x и потомъ по y.

Примѣръ. Оси двухъ круговыхъ цилиндровъ радіуса a пересѣкаются подъ прямымъ угломъ. Найти объемъ тѣла, общаго для обоихъ цилиндровъ.

Мы принимаемъ оси данныхъ цилиндровъ совпадающими съ координатными осями Oy и Oz. Такъ какъ тѣло расположено тогда симметрично относительно координатныхъ плоскостей, то мы опредѣлимъ сначала объемъ только той части, которая лежитъ между положительными координатными плоскостями и результатъ тогда умножимъ на 8.

Фиг. 139.

Тѣло ABDCO сверху ограничивается поверхностью цилиндра, ось котораго совпадаетъ съ осью y-овъ. Ур-іе этого цилиндра есть $z^2+x^2=a^2$. Если рѣшить это ур-іе относительно z, то мы получаемъ ту функцію, которая въ общемъ положеніи Xy обозначалась черезъ $f(x,y)$: $z=+\sqrt{a^2-x^2}$.
Корень берется со знакомъ $+$, т.к. мы разсматриваемъ часть тѣла, лежащую въ первомъ октантѣ.
По общей теоріи искомый объемъ выражается двойнымъ интеграломъ: $\frac{1}{8}v=\int dx\int+\sqrt{a^2-x^2}\,dy$ --- (89)
въ которомъ слѣдуетъ еще опредѣлить предѣлы.
Предѣлы для y, которые въ общемъ случаѣ будутъ функціями x, мы получаемъ, если проведемъ въ плоскости (xy) прямую PQ параллельную Oy и опредѣлимъ значенія x, соотвѣтствующія точкамъ P и Q, въ которыхъ прямая входитъ и выходитъ изъ основанія OAB цилиндра. Для точки P: $y=0$, поэтому нижній предѣлъ для y будетъ 0. Верхній предѣлъ соотвѣтствующій точкѣ Q мы получаемъ изъ ур-ія кривой AQB, на которой лежитъ точка Q. Эта кривая есть кругъ, описанный около начала радіусомъ a, ур-іе его поэтому есть $x^2+y^2=a^2$. Изъ этого слѣдуетъ верхній предѣлъ интеграла по y: $y=+\sqrt{a^2-x^2}$
Предѣлы внѣшняго интеграла по x постоянны и равны крайнимъ значеніямъ x-овъ, т.е. равны 0 и $OA=a$.
Прибавивъ найденные предѣлы въ формулѣ (89), мы получаемъ искомый объемъ въ видѣ:

$$\frac{1}{8}v=\int_0^a dx\int_0^{+\sqrt{a^2-x^2}}+\sqrt{a^2-x^2}\,dy \text{ ----- } (90).$$

При опредѣленіи внутренняго интеграла, x разсматривается, какъ постоянная величина, поэтому

$$\int_0^{+\sqrt{a^2-x^2}}+\sqrt{a^2-x^2}\,dy=+\sqrt{a^2-x^2}\int_0^{+\sqrt{a^2-x^2}}dy=+\sqrt{a^2-x^2}\Big[y\Big]_0^{+\sqrt{a^2-x^2}}=\sqrt{a^2-x^2}\cdot\sqrt{a^2-x^2}=a^2-x^2.$$

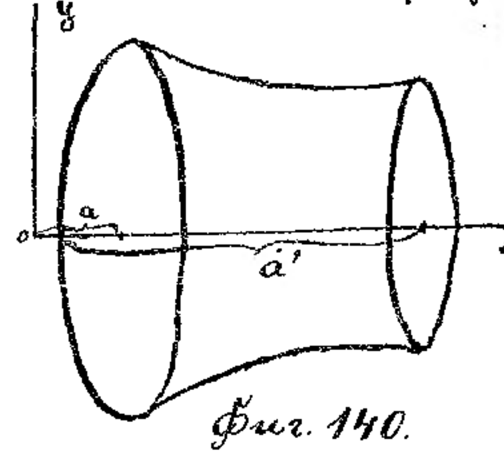
Подставимъ это выраженіе въ ур-іе (90):

$$\frac{1}{8}v=\int_0^a(a^2-x^2)\,dx=\Big[a^2x-\frac{x^3}{3}\Big]_0^a=a^3-\frac{a^3}{3}=\frac{2}{3}a^3.$$

Если умножить эту величину на 8, получается искомый объемъ всего тѣла: $v=\frac{16}{3}a^3$.

Въ особенно простомъ видѣ получается формула для объема такъ называемыхъ тѣлъ вращенія, которыя происходятъ отъ вращенія нѣкоторой кривой линіи около нѣкоторой оси.

Положимъ, что кривая $y = f(x)$ вращается около оси $X^{ов}$. Требуется вычислить объемъ



Фиг. 140.

образуемаго отъ этого вращенія тѣла, заключенный между двумя плоскостями, перпендикулярными къ оси вращенія и отстоящими отъ начала O на разстояніяхъ a и a'. По предъидущему искомый объемъ равняется $V = \int_a^{a'} \omega\, dx$, гдѣ ω есть площадь сѣченія перпендикулярнаго къ Ox. Всѣ эти сѣченія, въ случаѣ тѣла вращенія суть круги, площади которыхъ равняются πy^2. Подставивъ поэтому въ послѣднее ур-іе $\omega = \pi y^2$ и взявъ π, какъ постоянную величину, за знакъ интеграла, получимъ формулу объема тѣла вращенія:

$$V = \pi \int_a^{a'} y^2\, dx \quad \text{------} \quad (91)$$

<u>Примѣръ.</u> Опредѣлить объемъ эллипсоида вращенія, происходящаго отъ вращенія эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ около оси $X^{овъ}$.

Такъ какъ крайнія значенія x равны $-a$ и $+a$, то эти значенія будутъ предѣлами интеграла (91), и т. к. $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, то мы имѣемъ:

$$V = \pi \int_{-a}^{+a} \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\,dx = \frac{\pi b^2}{a^2}\int_{-a}^{+a}(a^2 - x^2)\,dx = \frac{\pi b^2}{a^2}\left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{+a} =$$

$$= \frac{\pi b^2}{a^2}\left[a^3 - \frac{a^3}{3} + a^3 - \frac{a^3}{3}\right] = \frac{\pi b^2}{a^2} \cdot \frac{4}{3} a^3 = \frac{4}{3}\pi a b^2.$$

Нахожденіе поверхностей тѣлъ вращенія.

Не только объемы, но и поверхности геометрическихъ тѣлъ можно вычислять помощью двойныхъ интеграловъ. Мы разсмотримъ только поверхности тѣлъ вращенія, которыя, какъ и объемы этихъ тѣлъ, опредѣляются не двойными, а простыми интегралами.

Пусть тѣло вращенія происходитъ отъ вращенія кривой AA' около оси $X^{овъ}$. Ур-е этой кривой пусть будетъ $y=f(x)$.

фиг. 141.

Требуется вычислить часть поверхности, содержащуюся между значеніями $x=a$ и $x=a'$. Мы раздѣлимъ отрѣзокъ AB' на n равныхъ частей величины Δx и возставляемъ въ полученныхъ такимъ образомъ точкахъ $C, C_1, \ldots$ перпендикуляры къ Ox; пересѣченія этихъ перпендикуляровъ съ кривою назовемъ $D_1, D_2, \ldots$ и соединимъ ихъ прямыми линіями. Теперь мы замѣняемъ кривую AA' ломанною линіею $AD_1D_2\ldots D_dD_{d+1}\ldots A'$ и опредѣляемъ поверхность тѣла, происходящаго отъ вращенія этой ломанной линіи около оси Ox. Она будетъ состоять изъ суммы поверхностей усѣченныхъ конусовъ. Пусть $OC_d=x$, $C_dC_{d+1}=\Delta x$, $C_dD_d=y$, $C_{d+1}D_{d+1}=y+\Delta y$. Тогда боковая поверхность усѣченного конуса, получающагося черезъ вращеніе прямой $D_dD_{d+1}=\Delta s$ по извѣстной формулѣ стереометріи будетъ:

$$\sigma=\pi(2y+\Delta y)\cdot\Delta s=2\pi y\,\Delta s+\pi\Delta y\cdot\Delta s.$$

Если перейти къ предѣлу $\Delta x=dx$, то Δs перейдетъ въ дифференціалъ дуги ds и второе слагаемое правой части сдѣлается безконечно-малымъ въ сравненіи съ первымъ. Поэтому имъ можно пренебречь и мы получаемъ $\sigma=2\pi y\,ds$. При предѣлѣ $\Delta x=dx$, тѣло, состоящее изъ конусовъ вращенія переходитъ въ тѣло вращенія кривой AA'. Поэтому искомая поверхность тѣла вращенія равняется суммѣ всѣхъ этихъ безконечно-малыхъ слагаемыхъ, т. е. $\int 2\pi y\,ds=2\pi\int y\,ds$ между нѣкоторыми предѣлами. Но по стр. 392: $ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ и, при интегрированіи по x, предѣлы будутъ a и a'; поэтому

$$\sigma=2\pi\int_a^{a'}y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \quad\text{-------}\;(92).$$

<u>Примѣръ</u>. Опредѣлить поверхность шара радіуса a.

Мы выбираемъ координатную систему такъ, чтобы начало ея совпадало съ центромъ шара. Тогда легко себѣ представить шаръ, происшедшимъ отъ вращенія полукруга $x^2+y^2=a^2$ -- (93) около оси $X^{овъ}$. Изъ ур-ія (93) имѣемъ:

$$y=\sqrt{a^2-x^2};\quad \frac{dy}{dx}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}};\quad 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{a^2}{a^2-x^2}$$

потому, по формулѣ (92):

Ф. 142.

$$S=2\pi\int_{-a}^{+a}a\,dx=2\pi a\int_{-a}^{+a}dx=4\pi a^2.$$